МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА

Зюбанов О.Є.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Вінниця

ДонНУ

2018

УДК 517.1(075)
З - 98

Автори: *О. Є. Зюбанов*, канд. фіз.-мат. наук, доц. каф. загальної фізики і дидактики фізики

Рецензенти: *Е. Є. Зубов* д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник, головний науковий співробітник Інституту металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України.

Н. М. Лосева, д-р пед. наук, проф. кафедри прикладної механіки і комп'ютерних технологій факультету математики і інформаційних технологій ДонНУ імені Василя Стуса

Затверджено на засіданні Вченої ради ДонНУ
(протокол № 3 від .11.2018 р.)

З-98 Навчальний посібник «Диференціальні рівняння» /Зюбанов О. Є. ─ Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2018. - 72 с.

Надано основні визначення теорії звичайних диференціальних рівнянь, наведено методи вирішення таких рівнянь. Навчальний посібник розраховано на студентів спеціальності «Фізика та астрономія», «Середня освіта – фізика», «Прикладна фізика», «Кібербезпека», «Комп'ютерні науки».

УДК 53(075.34)
З - 98

ЗМІСТ

Вступ

Ми живемо в світі взаємозалежних об'єктів, що постійно рухаються. Літак пролітає в височині, машини проносяться по дорозі, погода постійно змінюється. В це треба якось описувати.

В математиці об'єкти, що змініються, характеризуються функціями − змінними величинами, залежними від інших змінних, а також похідними цих функцій, так як відомо, що похідна за своїм фізичним змістом − це швидкість зміни функції. Рівняння, що зв'язують функції, їх похідні і незалежні змінні називаються диференціальними рівняннями. Саме диференціальними рівняннями є добре відомі нам закони природи: другий закон Ньютона, рівняння динаміки твердого тіла, рівняння Максвелла і багато інших. [1]

Курс диференціальних звичайних рівнянь і присвячений тому як, знаючи зв'язки між похідними, знайти явні залежності. Це дає нам можливість робити прогнози, передбачати події, розуміти поведінку об'єктів, прогнозувати майбутні події.

Розглянемо одну історичну подію, яка продемонструє нам важливість диференціальних рівнянь.

Це трапилося 12 вересня 1940 року поблизу французького міста Ласко. Група підлітків гуляла в лісі і натрапила на вузький отвір, що утворилося після падіння сосни, в яку влучила блискавка. Опустившись в нього, хлопчаки побачили печеру, стіни якої були прикрашені живописом. На стінах були зображені сцени полювання на давно зниклих тварин, а в центрі печери розташовувалося місце для багаття зі збереженими обгорілими полінами. Марсель Равід, Жак Марсаль, Жорж Аньель і Симон Коенка повідомили про це відкриття свого вчителя Леона Лаваль.

Це було сенсаційне відкриття залишків культури древніх людей, але як давно жили люди в цій печері?

Відповідь на це питання вчені отримали, проаналізувавши вуглецевий склад залишків багаття древніх мисливців. Як відомо, дерева ростуть, засвоюючи вуглець, який є одним з основних елементів живих біологічних організмів. Вуглець, присутній в земній атмосфері складається з стабільних ізотопів ^{12}C (98,89 %), ^{13}C (1,11 %) та радіоактивного − ^{14}C, який міститься в надзвичайно малих кількостях (близько 10^{-10}%).

[1] Матеріал для повторення: похідні, диференціали, невизначені і визначені інтеграли.

Рис. 1 Малюнки наскального живопису печери Ласко − «Сікстинської капелою первісної живопису»

Ізотоп ^{14}C постійно утворюється в основному у верхніх шарах атмосфери на висоті 12—15 км при зіткненні вторинних нейтронів від космічних променів з ядрами атмосферного азоту. В середньому в рік в атмосфері Землі утворюється близько 7,5 кг радіовуглецю при загальній його кількості приблизно 75 тонн. Завдяки постійному перемішуванню атмосферного повітря, ізотоп ^{14}C потрапляє в нижні шари атмосфери і засвоюється живими організмами. Поки організм живе пропорція між стабільним ізотопом ^{12}C і радіоактивним ^{14}C залишається незмінною, але після загибелі живого організму, завдяки радіоактивного розпаду ^{14}C (період полураспаду ^{14}C складає $T_{1/2}$ = 5730 ± 40 лет, постійна распаду λ = 0,0001209 год$^{-1}$) пропорція порушується і вимірявши пропорцію між цими елементами в даний час, можливо визначити час загибелі дерев використаних древніми мисливцями для свого багаття.

Закон радіоактивного разпаду має вид

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \quad (1)$$

де x – кількість радіоактивного вуглецю в момент часу t.

Як бачимо, функція яка нас цікавить $x = x(t)$ стоїть під знаком похідної, тобто перед нами типове диференціальне рівняння. Ясно, щоб знайти залежність $x = x(t)$ в явному виді, необхідно вилучити $x(t)$ із під знаку диференціалу, тобто необхідно виконати операцію зворотню до диференціювання, тобто проінтегрувати. Виконаємо перетворення рівняння (1)

$$\frac{dx}{x} = -\lambda \, dt,$$

проінтегруємо зліва і справа отримане співвідношення,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=-\int_{0}^{t}\lambda\,dt,\qquad ln(x)\Big|_{x_0}^{x}=-\lambda t\Big|_{0}^{t},\ \ln(x)-\ln(x_0)=-\lambda t, x=x_0\,e^{-\lambda t}.$$

З хімічних досліджень, виконаних для залишків багаття в печері Ласко, виявилося, що кількість ^{14}C складає 0,145 від початкового, то б то $x/x_0=0{,}145$ і це дає нам можливість визначити їх вік

$$t=-\frac{\ln(0.145)}{0.0001209}=15776$$ років або приблизно 15700 років.

За розробку в 1946 році методу радіовуглецевого аналізу американський фізико−хімік Уиллардом Ліббі був удостоєний Нобелівської премії з хімії в 1960 році.

Звичайні диференціальні рівняння

Як відомо, похідні бувають повні і часткові. Курс звичайних диференціальних рівнянь присвячений вивченню рівнянь, що містять похідні функції тільки однієї змінної, тобто вивчення методів отримання рішень рівнянь в повних похідних.

Напочатку, введемо важливі визначення.

Definition (Def.) Звичайним диференціальним рівнянням n−го порядку називається рівняння виду

$$F\,(x, y(x), y^{I}(x), y^{II}(x),..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

де F − відома функція (n + 2) змінних, x – незалежна змінна з інтервалу (a, b), y(x) − невідома функція. Число n називається порядком диференціального рівняння і визначається порядком найбільшої похідної производной невідомої функції y(x).

Def. Функція y=f(x) називається решенням (або інтегралом) диференціального рівняння на інтервалі (a, b), як що вона має n похідни на (a, b) і при підстановці їх в рівняння перетворює його в тотожність[2].

$$F\,(x, f(x), f^{I}(x), f^{II}(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0.$$

Процес знаходження рішення диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.[3]

---

[2] Питання. Що називається тотожністю? Яким математичним символом позначається тотожність?

[3] Інтегрування – це знаходження первісної функції.

$F(x)=\int f(x)dx+C, dF(x)=f(x)dx, \frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ Приклад:

$\frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x},\ d(\ln x)=\frac{1}{x}dx, \int\frac{1}{x}dx=\int d(\ln x)=\ln x+C$. Як бачимо, мета інтегрування внести підінтегральну функції під знак диференціалу, тоді стикаємося із ситуацією, що спочатку виконується операція диференціювання, а за нею зворотня операція – інтегрування ($f^{-1}(f((x))=x$), або мета

Звичайним диференціальним рівнянням, вирішеним щодо вищої похідної, називають рівняння у вигляді:

$$y^{(n)} = f\,(x, y, y^{I}, y^{II}, ..., y^{(n-1)}).$$

Диференціальне рівняння має область визначення, так як не завжди рівняння, що містять похідні невідомої функції мають сенс.

Наприклад. Розглянемо рівняння $\left(y^{I}\right)^2 + y^2 + 1 = 0$. Це рівняння містить невідому функцію, її похідні, але ясно, що рішень воно не має, так як сума позитивних функцій не може дорівнювати нулю ні при яких значеннях аргументу x.

Запис *$F\,(x, y(x), y^{I}(x), y^{II}(x),..., y^{(n)}(x)) = 0$ – має назву диференціальне рівняння не вирішене відносно похідної вищого порядку, а* $y^{(n)} = f\,(x, y, y^{I}, y^{II}, ..., y^{(n-1)})$ *− має назву диференціальне рівняння вирішене відносно похідної вищого порядку*.

Завдання. Визначити порядок диференціального рівняння:

1. $dy + (xy - \cos x)dx = 0$
2. $y'' + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0$
3. $\left(y''\right)^3 - \left(y'''\right)^4 + x = 0$

Завдання. Перевірити, чи є задані функції рішеннями запропонованих диференціальних рівнянь:

1. $y' + y = 0, y = e^{-x}$
2. $y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}$, $y(x) = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$
3. $x\dfrac{dy}{dx} - y = xe^x$, $y(x) = x\left(1 + \int \dfrac{e^x}{x}dx\right)$
4. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx} = 1$, $y = arctg(x+y) + C$
5. $(1+xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$, $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$

інтегрування знайти функцію похідна від якою і є підінтегральною функцією. І символ d і символ $\int$ − це символи, які вимагають від нас виконати дії, вони мають назву операторій і отримують конкретний сенс коли починають діяти на конкретні функції.

Розділ 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Почнемо вивчення методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь з найбільш простих − диференціальних рівнянь першого порядку

$$F(x, y(x), y^{I}(x)) = 0$$

Рівняння вирішене відносно першої похідною

$$y^{I} = f(x, y)$$

Більш зручний запис для виконання перетворень наступний

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

Геометричний сенс диференійного рівняння першого порядку.

Якщо вказати координати точки (x,y), то рівняння дозволяє обчислити похідну $\frac{dy}{dx}$ в цій точці, тобто кутовий коефіцієнт нахилу дотичної графіка шуканої функції − поле напрямків, завдання вирішення рівняння (1) − знаходження кривих (інтегральних кривих) напрямки дотичних до яких збігається з полем напрямків. Поле напрямків зображується маленькими відрізками прямих. Таким чином, геометричний сенс диференціального рівняння першого порядку, вирішеного відносно похідної − це задання поля напрямків.

Диференціальне рівняння можливо записати і так $f(x, y)dy + g(x, y)dx = 0$ − це диференціальне рівняння записане в диференціалах.

Приклад. $\frac{dy}{dx} = x + y$. Побудуємо поле напрямків.

Таблиця значень похідних

y \ x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−5	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
−4	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
−3	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2
−2	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
−1	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
0	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
1	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
2	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

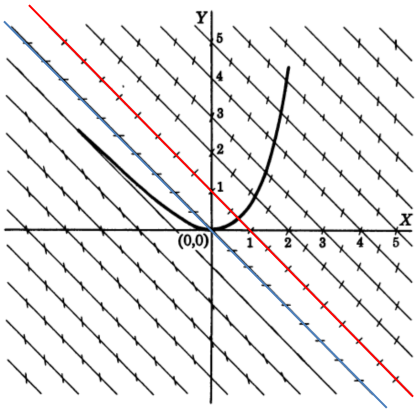


Рис. 2 Поле напрямків і інтегральна крива.

Зручним засобом побудови поля напрямків є метод ізоклін. Ізокліна − лінія постійної похідною. Для рівняння $\frac{dy}{dx} = x + y$, изокліна задовольняє рівняння $x + y = C^*, y = -x + C^*$. C^*=0, на прямій $y = -x$ вказуємо напрямок похідної у вигляді маленьких відрізків паралельних вісі ОХ, C^*=1, на прямій $y = -x + 1$ вказуємо напрямок похідної у вигляді маленьких відрізків спрямованих під кутом 45^0 до вісі ОХ і т.д.

Рішення цього рівняння має вид $y = Ce^x - 1 - x$, а рівняння лінії, що проходить через точку (0,0) $y = e^x - 1 - x$ (C^* і С це різні константи, C^*− стала значення похідної, С – стала яка з'являється при виконанні процедури інтегрування).

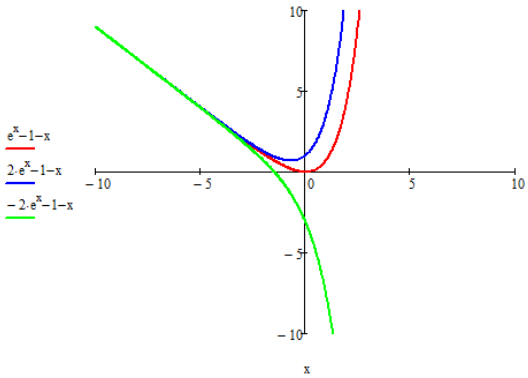


Рис. 3 Графіки рішень рівняння $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y = Ce^x - 1 - x$ для різних значень С.

Бачимо, що в області x<0 усі решення прагнуть до лінії – y=1−x, так як експонента в цій області дуже швидко прагне до 0.

Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ можна записати і в наступному вигляді $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ і шукати рішення як $x(y)$.

Завдання. Побудувати ізокліни для диференціального рівняння і намалювати інтегральні криві:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ [4]

Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Задача знаходження рішення диференціального рівняння далеко не просте завдання і часто отримати рішення в елементарних функціях взагалі не вдається.

Наприклад. Рівняння $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ и $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ зовні не сильно відрізняються одне від одного, але якщо для першого рівняння можливо отримати рішення в елементарних функціях, то для другого − ні.

Існує клас рівнянь, які можливо завжди вирішити і записати рішення.

Розглянемо ці рівняння.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними − це рівняння виду

$$y^I = f(x)g(y)$$

Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1)$$

Зверніть увагу на те, чим воно відрізняється від стандартного рівняння вирішеного відносно першої похідною?

Що значить розподілити змінні?

Це значить записати диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad (1.1a)$$

У такій формі рівняння можна проінтегрувати, адже зліва стоїть функція $\frac{1}{g(y)}$, що залижить від y і діференціал dy, а справа функція $f(x)$, що залежить від x і діференціал dx, тоді отримуємо

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (1.2)$$

---

[4] Для перевірки правильності побудови інтегральних кривих за метотом ізоклін, вирішіть рівняння та намалюйте інтегральні криві.

і хоча ми не знаємо залежності $y(x)$, але інтеграл по у часто можливо обчислити аналітично, але якщо навіть і не обчислимо аналітично, то обчислимо чисельно. Запис (1.2) вже є рішенням диференціального рівняння і називається рішенням в квадратурах (тобто у вигляді інтегралів).

Якщо вдається проінтегрувати (1), то отримуємо загальне рішення диференціального рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$.

Звернемо увагу, що при поділі змінних можлива втрата деяких рішень. Якщо в рівнянні (1) $g(y)$ може дорівнювати нулю, то вже в (1а) ні $g(y) \neq 0$.

Приклад. Виріши рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Права частина рівняння визначена при $x \neq 0$. Розподілемо змінні $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруєм $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, C > 0$. Тут вибирається спеціальний вид довільної константи[5]. $\ln|y| = \ln|x| + \ln C,\ |y| = C|x|, y = \pm Cx$ або $y = Cx$, де С може бути як позитивним так і негативним. При розподілі на у, $y \neq 0$ і, отже, $C \neq 0$, але поділ на у призвів до втрати часткового рішення $y = 0$, проте це рішення можливо отримати з загального, вважаючи, що С може приймати значення 0.

Розглянемо рівняння, як рівняння щодо невідомої функції $x(y)$, тоді його треба записати як $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ і можливо отримати ще одне рішення $x = 0$.

Як бачимо, рішення диференціального рівняння першого порядку містить одну довільну константу. Якщо потрібно знайти інтегральну криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0), або $y(x_0) = y_0$, то необхідно вказати цю точку і значення функції в ній, тобто задати початкові умови. *Таке рівняння з початковими умовами називається задачею Коші.*

Наприклад. Для рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ решення відоме $y = Cx$ і як що накласти умови, що при x=1, y=1, тоді, C=1, а частне решення має вид, $y = x$, можливо було використовувати початкові умови ще на етапі інтегрування

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \frac{dx}{x},\ \ln y\Big|_1^y = \ln x\Big|_1^x, \ln y - \ln 1 = \ln x - \ln 1, \ln|y| = \ln|x|, y = x.$$

Приклад. Проаналізуємо якісний характер поведінки інтегральних кривих рівняння

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4)$$

[5] Вид довільної константи вибираємо так, щоб кінцеву формулу можливо було спростити.

де ρ, φ − змінні полярної системи координат.

З вигляду рівняння ясно, що воно має і такі рішення як $\rho = 0, \rho = 2, \rho = 4$. Оцінимо знак похідної. $\dfrac{d\rho}{d\varphi} > 0, 0 < \rho < 2, \dfrac{d\rho}{d\varphi} < 0, 2 < \rho < 4, \dfrac{d\rho}{d\varphi} > 0, \rho > 4$. Тобто при $0 < \rho < 2$ рішенням буде спіраль, що наближається до $\rho = 2$ з низу, при $2 < \rho < 4$ рішенням буде спіраль, що наближається до $\rho = 2$ з верху, а при $\rho > 4$ рішенням є спіраль, що розкручується. Решення $\rho = 2, \rho = 4$ називаються граничними циклами.

Побудова ортогональних траєкторій за допомогою диференціальних рівнянь.

Ортогональні траєкторії для заданого сімейства кривих є лінії перпендикулярні до них. Мовою похідних це означає перпендикулярність дотичних. Якщо, перше сімейство ліній має дотичними y_1', а друге − y_2', то як відомо, для ортогональних прямих $y_2' = -\dfrac{1}{y_1'}$.

Приклад. Побудувати лінії ортогональні до сімейства парабол. Дотична до сімейства парабол задається рівнянням $y' = 2ax$, $a = \dfrac{y}{x^2}$, тоді $y' = 2\dfrac{y}{x}$ і отже сімейство ортогональних ліній описується диференціальним рівнянням $y' = -1\Big/\left(2\dfrac{y}{x}\right), y' = -\dfrac{x}{2y}$. Вирішивши це рівняння отримуємо $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = C^2, \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}C}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{C}\right)^2 = 1$, а це є сімейство еліпсів.

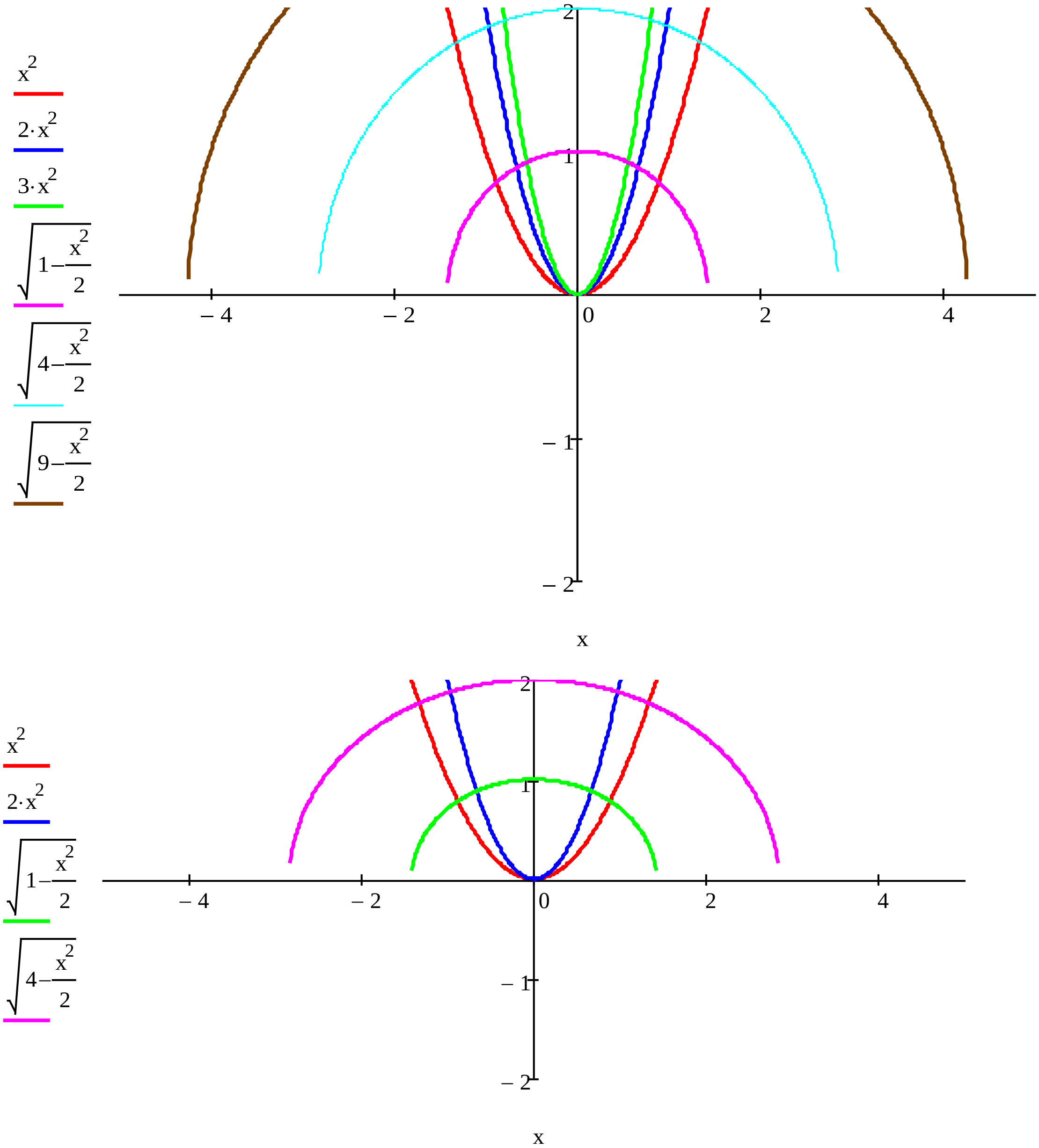


Рис. 4 Комп'ютерна графіка, що не дає правильний вид, бо комп'ютер масштабує рисунок.

І так, рівняння із відокремлюваними змінними, це рівняння які завжди можливо вирішити або до кінця виконавши інтегрування, або запичавши відповідь у вигляді інтегралів (рішення в квадратурах), а потім обчисливши ці інтеграли чисельно.

Існує декілька класів диференціальних рівнянь, які заміною змінних можуть бути зведені до рівнянь з відокремлюваними змінними.

1. Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f_1(ax+by), \quad (1.3)$$

заміна $z = ax + by,$ тоді $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$, або $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$ і рівняння зводиться до $\frac{dz}{dx} = bf(z) + a$, решення в квадратурах $\int \frac{dz}{bf(z)+a} = \int dx + c$, а після треба знайти $y(x)$.

2. Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}), \quad (1.4)$$

заміна $z = \frac{y}{x}, y = x\,z, \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z \quad x\frac{dz}{dx} + z = f(z), \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$, рівняння зводиться до $\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$, а це вже рівняння із розподілювальними змінними.

3. Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \quad (1.5)$$

Для його вирішення переходять до нових змінних $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, наступним чином, знаходимо рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}, \begin{cases} x = \tilde{x} + x_0 \\ y = \tilde{y} + y_0 \end{cases}$[6], тоді в нових змінних рівняння приймає вид $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y}}\right)$, і його можна звести до наступного рівняння $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_2 + b_2\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)$

.

Завдання. Вирішити наступні рівняння:

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + y$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$
4. $(x + y)dx - (y - x)dy = 0$

[6] За геометричним сенсом, рішення системи двох лінійних рівнянь – це точка перетину двох прямих, а введення нових координат – це перехід в нову систему координат, в якій точка перетину має координати (0,0)

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$[7]

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x) \quad (1.6)$$

де $p(x)$ и $f(x)$ − безперервні функції в області, де потрібно знайти рішення.

Чому це рівняння називається лінійним?

Метод його вирішення.

Вирішимо на початку однорідне рівняння, тобто рівняння

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \quad (1.7)$$

Це рівняння із відокремлюванними змінними і його рішення має вигляд

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}, C\neq 0.$$

Рішення рівняння

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

будемо шукати методом варіації довільної константи.

У чому суть цього методу. Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, тоді підставивши цю функцію в ісходне рівняння отримаємо диференціальне рівняння для $C(x)$

$$\frac{dC}{dx}=f(x)e^{\int p(x)dx}$$

звідки $C(x)=\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1$, а $y=C_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Завдання. Вирішити рівняння $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$. ($y=C_1x+\frac{x^3}{2}$)

Існує клас рівнянь, які заміною змінної зводяться до лінійного диференціального рівняння. Це *рівняння Бернуллі*.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n \quad (1.8)$$

---

[7] Обчислення в Mathcad 15 інтегралу $\int \frac{(1+z)}{\left(1-2z-z^2\right)}\,dz \rightarrow -\frac{\ln\left(z^2+2\cdot z-1\right)}{2}$ і в ручну аналітичне $-\frac{\ln\left|1-2z-z^2\right|}{2}=-\frac{\ln\left|z^2+2z-1\right|}{2}$, як бачимо необхідно провести аналіз відповіді після машинного обчислення.

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+p(x)\frac{1}{y^{n-1}}= f(x), n\neq 1$$

Заміна $z=\frac{1}{y^{n-1}}$ дозволяє зробити його лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z= f(x), n\neq 1$$

Приклад. Вирішити рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$.

Рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2= f(x) \quad (1.9)$$

Це рівняння можливо звести до рівняння Бернуллі, якщо відомо одне приватне рішення $y_1(x)$, зробимо заміну $y=y_1+z$, рівняння для $z(x)$ приймає вид

$$\frac{dz}{dx}+\left[p(x)+2q(x)y_1\right]z+q(x)z^2=0$$

Приклад. Вирішити рівняння $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$ (часткове рішення $y_1=\frac{1}{x}$).

Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Існує цікавий клас диференціальних рівнянь, які називаються рівняння в повних диференціалах, і які можуть бути часто проінтегровані.
Ці рівняння зводять до вигляду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad (1.10)$$

В принципі в такому вигляді можна записати будь−яке диференціальне рівняння, але щоб це було рівняння в повних диференціалах необхідно виконання умови на функції $M(x,y)$ и $N(x,y)$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Якщо ця умова виконується, то існує функція $u(x,y)=C$, така що

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \text{ и } M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\ N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$$

Якщо проінтегрувати рівняння $du(x,y)=0$, то $\int du(x,y)=C$, але важливо пам'ятати, що інтеграл від повного диференціала не залежить від шляху інтегрування, а визначається тільки значеннями функції в початковій (x_0,y_0) і кінцевої (x,y) точках.
Як можливо знайти рішення рівняння в повних диференціалах. Так як

$M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то $\partial u = M(x,y)\partial x, u = M(x,y)\partial x,\ u=\int M(x,y)dx + C(y)$ при інтегруванні у вважається постійним. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y}+\dfrac{dC(y)}{dy}=N(x,y)$, отримуємо рівняння для визначення $C(y)$. Другий спосіб інтегрування по шляху від (x_0,y_0) до (x,y_0) і від (x,y_0) до (x,y), т.е.

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y_0)dx+\int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)dx$$

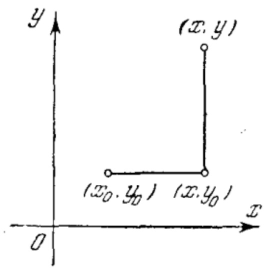


Рис. 5 Шлях інтегрування.

А $u(x,y)=C$ буде спільним рішенням вихідного рівняння.

Приклад. Вирішити диференціальне рівняння $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$

Ліва частина є повний диференціал. Перевірте це, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1,\ u(x,y)=\int (x+y+1)dx+C(y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y)=x-y^2+3$$

$$C(y)=\int\left(-y^2+3\right)dy+C_1$$

$$C(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+C_1$$

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+C_1$$

Загальний інтеграл має вигляд

$$\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y=C_2$$

Другий спосіб. Вибираємо початкову точку $(0,0)$

$$u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left((x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy\right)$$

$$u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,0)}(x+1)dx+\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y^2+3)dy$$

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y$$

Загальний інтеграл має вигляд $\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C$

Іноді диференціальне рівняння не є диференціальним рівнянням в повних диференціалах, але множення на деякий множник − інтегруючий множник $\mu(x,y)$, дозволяє зробити його таким

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \quad (1.11)$$

Знайти інтегруючий множник не просто, але в разі якщо він залежить тільки від однієї змінної, наприклад, $\mu(x)$, тоді $\mu=Ce^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}}{N}dx}$, яке знаходять з умови приналежності рівняння до рівнянь в повних диференціалах, можливо знайти інші види для μ, вважаючи його залежним наприклад, тільки від y, y/x або інших комбінацій.

Приклад. Знайти форму дзеркала, що відображає праллельно все промені в заданому напрямку від точкового джерела.

Рішення. Джерело помістимо в початок координат, вісь OX направимо уздовж заданого напрямку, що відображає поверхню задамо рівнянням $y=y(x)$, відображення відбувається в точці (x,y). Луч падає на дзеркало в точці M, дотична до цієї точки NM. Так як кут падіння дорівнює куту відбиття, то трикутник NMO, тому $NO=MO$ і

$$tg\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

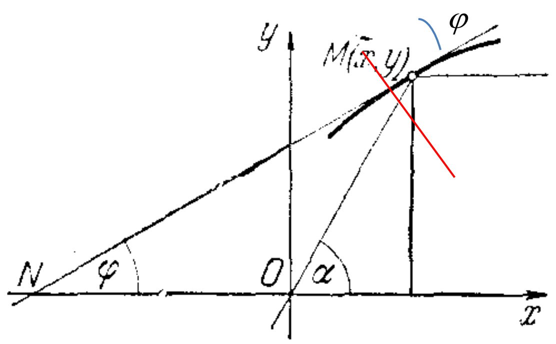


Рис. 6 Відбиття променів в заданому напрямку.

Рівняння, яке необхідно вирішити, щоб знайти рівняння поверхні

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

Перетворимо дане рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$$

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx$$

$$dx=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, dx=\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Останнє рівняння легко інтегрується

$$\int dx+C=\int\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

Тоді $x+C=\sqrt{x^2+y^2}$ і $y^2=2Cx+C^2-$ це рівняння параболи.

Приклад. Вирішити диференціальне рівняння $(y-y^2-x^2)dx-xdy=0$. Виконаємо перетворення цього рівняння

$$ydx-xdy=(y^2+x^2)dx,\ \frac{ydx-xdy}{x^2}=(1+\frac{y^2}{x^2})dx$$

$$-d\,\frac{y}{x}=(1+\frac{y^2}{x^2})dx$$

$$\frac{-d\,\frac{y}{x}}{(1+\frac{y^2}{x^2})}=dx,\ \int\frac{-d\,\frac{y}{x}}{(1+\frac{y^2}{x^2})}=\int dx+C, arctg(\frac{y}{x})=-(x+C), x\neq 0$$

Тоді $y=-xtg(x+C), x\neq 0$.

Як бачимо, рішення диференціальних рівнянь вимагає аналізу і роздумів.

Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку

Важливим є питання, коли взагалі існує рішення диференціального рівняння і чи є воно єдиним.

Сформулюємо наступну теорему.

Теорема. Якщо в рівнянні $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ *функція* $f(x,y)$ *неперервна в прямокутнику* D $(x_0-a<x<x_0+a, y_0-b<y<y_0+b)$ *та задовольняє умовам Ліпшиця*

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\leq N\left|y_2-y_1\right|$$

де N – стала, то існує єдине рішення $y(x)$ в області $x_0 - H < x < x_0 + H$ і $y(x_0) = y_0$, де $H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right), M = \max f(x,y)$ в D.[8]

Приклад. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(0) = 1$. Вирішуючи це рівняння легко знайти відповідь $y = \sqrt{1 - x^2}$, теорема єдиності порушується при $y = 0$, тобто на вісі OX.

Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь

Метод Ейлера

Для вирішення рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ на інтервалі $x_0 < x < b$, цей інтервал розбивається на n рівних частин точками $x_0, x_1, ... x_n = b$ з кроком обчислень $h = \frac{b - x_0}{n}$, $h = x_{i+1} - x_i$. Шукати інтегральну криву будуємо як набір ламаних прямих відрізків з відомими кутовими коефіцієнтами в точках x_i.

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0),\ y'(x_0) = f(x_0, y_0) \quad (1.12)$$
$$y_2 = y_1 + hy'(x_1),\ y'(x_1) = f(x_1, y_1)$$
$$....$$
$$y_n = y_{n-1} + hy'(x_{n-1}),\ y'(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Тобто використовується апроксимація інтегральної кривої відрізками прямих.

Уточнений метод Ейлера.

Інтегральна крива замінюється набором ламаних, але в якості кутового коефіцієнта береться середнє значення похідної в точках $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$.

І так крок перший $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, крок другий робимо уточнення $\bar{y}_1 = y_0 + h\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}$, крок третій $y_2 = \bar{y}_1 + hf(x_1, \bar{y}_1)$, наступний крок (робимо уточнення) – $\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + h\frac{f(x_1, \bar{y}_1) + f(x_2, y_2)}{2}$ і та далі.

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + h\frac{f(x_k, \bar{y}_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}$$

Разклад в ряд Тейлора

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}y''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$$

---

[8] Умову Ліпшиця можливо замінити більш грубою умовою існування $f'_y(x,y)$ в прямокутнику D і відповісти на питання про існування та єдиність розв'язку.

Виникає питання про радіус збіжності цього ряд, так як знак рівності справедливий тільки в області збіжності ряду.

Апроксимація інтегральної кривої параболами n−того порядку

$$y_{k+1} \approx y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \ldots + \frac{h^n}{n!} y_k^{(n)}$$

Існують і інші методи, такі як методи Штермер, Рунге−Кутта і інші.

Найпростіші типи рівнянь, не вирішені щодо похідної

Розглянемо рівняння виду $F(x, y, y') = 0$. Якщо це рівняння не лінійне відносно похідної і це призводить до особливостям.

Приклад. Вирішити рівняння $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$. Вирішемо його відносно похідної: $y' = x, y' = y$. Рішення першого рівняння $y = \frac{x^2}{2} + C_1$, рішення другого − $y = C_2 e^x$ (Мал. 7).

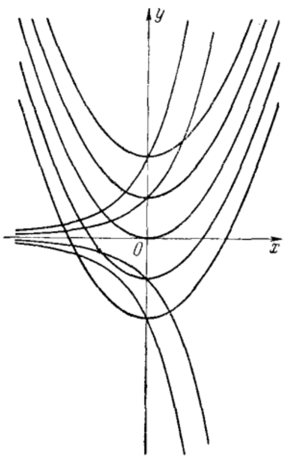
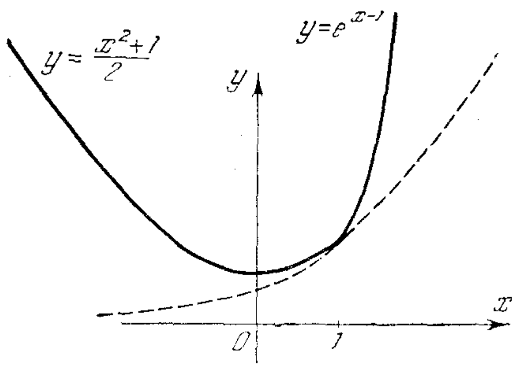


Рис. 7 Інтегральні криві

Але інтегральними кривими будуть і лінії, складені з дуг $y = \frac{x^2}{2} + C_1$ і $y = C_2 e^x$ при наявності точок перетину з однаковими похідними (Мал. 8).



Мал. 8 Інтегральна крива, складена з дуг.

Для заданого рівняння це лінії $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ в області ($-\infty<x<1, C_1=\frac{1}{2}$) і $y=\frac{1}{e}e^x$ в області ($1<x<\infty, C_2=\frac{1}{e}$).[9]

Типи рівнянь, для яких можливо знайти аналітичні рішення.

1. Рівняння вида

$$F(y')=0$$

Припустимо, що існує хоча б один дійсний корінь $y'=k_i$. Тоді $\frac{dy}{dx}=k_i, y=k_i x+C, k_i=\frac{y-C}{x}$ і рішення диференціального рівняння має вигляд

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

Приклад.

$$(y')^5-(y')^2+1=0$$

Рішення рівняння

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5-\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+1=0$$

2. Рівняння вида $F(x, y')=0$.

Якщо його важко вирішити щодо y' рішення шукаємо в параметричному вигляді $x=\varphi(t), y'=\psi(t)$. Тогда

$$dy=y'dx,\ dx=\varphi'(t)dt,\ dy=\psi(t)\varphi'(t)dt, y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C$$

Інтегральні криві визначаються параметричних поданням

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C \end{cases}$$

Якщо рівняння легко вирішується відносно x, то в якості параметричної залежності вибирають $y'=t$.

Приклад. Вирішіти рівняння $(y')^3-y'-x=1$. Вирішемо його відносно x, $x=(y')^3-y'-1$, вибираємо параметричне представлення $y'=t$, тоді $x=t^3-t-1$,

$$dy=y'dx,\ dx=\left(3t^2-1\right)dt,\ dy=t\left(3t^2-1\right)dt, y=\int t\left(3t^2-1\right)dt+C \text{ и } y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+C$$

Інтегральні криві визначаються параметричних поданням

$$\begin{cases} x=t^3-t-1 \\ y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+C \end{cases}$$

Приклад. Вирішіти рівняння $x\sqrt{1+y'^2}=y'$.

[9] В сенсі фізики, такі інтегральні криві відповідають переходу на іншу траєкторію руху тіла.

Спробуємо вибрати таке параметричне представлення, щоб позбутися від радикала в рівнянні. Виберемо $y' = tg\,t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, тоді $x = \sin t$.

$$dy = y'dx,\ dx = \cos t\,dt,\ dy = tg\,t\cos t dt = \sin t\,dt, y = -\cos t + C$$

Інтегральні криві визначаються параметричних поданням

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -\cos t + C \end{cases}$$

або в неявному вигляді $x^2 + (y - C)^2 = 1$. Що собою являють ці лінії?

Візьміть іншу параметризацію і отримаєте рішення. (Наприклад, скористайтеся гіперболічними функціями і умовою $ch^2 t - sh^2 t = 1, ch^2 t = 1 + sh^2 t$).

3. Рівняння виду $F(y,\ y') = 0$.

Якщо його важко вирішити відносно y' рішення шукаємо в параметричному вигляді $y = \varphi(t), y' = \psi(t)$. Тогда

$$dy = y'dx,\ dx = \frac{dy}{y'},\ dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}, x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C$$

Інтегральні криві задаються параметричних поданням

$$\begin{cases} x = x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C, \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Приклад. $\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 1$. Скористайтесь параметризацією $y' = sh\,t$, тоді $y = ch\,t$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{sh\,t\,dt}{sh\,t} = dt, x = t + C$. Загальне рішення має вид $y = ch(x - C)$.

У загальному випадку для рівняння $F(x, y, y') = 0$ можливо вибрати параметризацію $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ і із рівняння $F(x, y, y') = 0$ находимо $y' = \chi(u, v)$. Так як $dy = y'dx$, то отримаємо наступне

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv\right)$$

і вирішиючи це рівняння відносно похідної $\frac{du}{du}$ знаходимо, що

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi(u, v)\frac{\partial \varphi}{\partial v}}$$

Це вже рівняння дозволене щодо першої похідною.

Як що рівняння $F(x, y, y') = 0$, легко вирішити щодо y і отримати $y = f(x, y')$, то в якості параметрів вибираємо x і $y' = p$. При цьому $y = f(x, p)$, тоді

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp, \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

І вирішуючи це рівняння щодо $\frac{dp}{dx}$ отримаємо

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Його інтегрування дає $\Phi(x, p, C) = 0$ і, совмісно з $y = f(x, p)$, можливо знайти інтегральні криві.

Аналогічно вчиняють, коли рівняння $F(x, y, y') = 0$ легко вирішити відносно x.

Розглянемо окремий випадок − *рівняння Лагранжа*. Це рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \quad (1.13)$$

Параметризація проводиться через x і $y' = p$. Тобто $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, продифференцировав це співвідношення по x та отримуємо

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

або

$$\left(p - \varphi(p)\right)\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p)$$

Останнє рівняння є лінійне рівняння і може бути вирішено як $\Phi(x, p, C) = 0$ (з відси і спільно з $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ можливо отримати інтегральні криві.

При отриманні лінійного рівняння виконувалася операція ділення на $\frac{dp}{dx}$ і важливо, щоб $\frac{dp}{dx} \neq 0$. Як що $\frac{dp}{dx} = 0$, рівняння Лагранжа має додаткові рішення $y' = C$ при умові, що $p - \varphi(p)$ має рішення $p - \varphi(p) = 0$. Якщо останнє рівняння має коріння p_i то слід додати ще й рішення виду $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ − це прямі лінії (це рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ де $y' = p_i$).

Розглянемо випадок коли $\varphi(p) = p$, тоді втрачається рішення $p = C$. Рівняння називається *рівнянням Клеро*:

$$y = xy' + \psi(y') \quad (1.14)$$

Це окремий випадок рівняння Лагранжа. Рішення рівняння Клеро $p = C, y = Cx + \psi(C)$ і крива задана параметрично умовами $x = -\psi'(p), y = xp + \psi(p)$, це є особлива лінія є огинаючою для рішень $y = Cx + \psi(C)$.

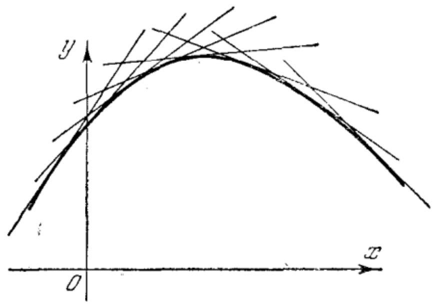


Рис. 9 Сімейство прямих і огинаюча до них.

Приклад. Вирішити рівняння Клеро $y = xp - (y')^2$. Рішенням даного рівняння є однопараметричне сімейство інтегральних кривих $y = xC - C^2$ і огинаюча $x = 2p, y = xp - p^2$ або в явному виді $y = \frac{x^2}{2}$.

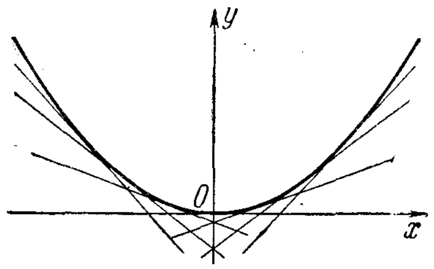


Рис. 10 Сімейство прямих і огинаюча до них для рівняння $y = xp - (y')^2$.

Теорема існування та єдиності рішення для диференціальних рівнянь, не вирішених відносно похідної

Теорема. Існує єдине рішення рівняння $F(x, y, y') = 0$, *що проходить за данним напрямком, у вигляді* $y = y(x)$, $x_0 - h_0 \le x \le x_0 + h_0$, *де* h_0 *достатньо мале, задовольняє умові* $y(x_0) = y_0$, *для яких* $y'(x_0) = y_0'$ *(це і є вказівник напрямку), де* y_0' − *один із дійсних коренів рівняння* $F(x_0, y_0, y') = 0$, *якщо в замкнутій околиці точки* (x_0, y_0) *функція* $F(x, y, y')$ *задовольняє умовам:*

1) $F(x, y, y')$ *безперервна за своїми аргументами;*
2) *похідна* $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *існує та відмінна від нуля;*
3) *існує обмежена за модулем похідна* $\frac{\partial F}{\partial y}$,

$$\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \le N_1$$

Іноді виникають особливі рішення диференціального рівняння $F(x, y, y') = 0$ як огинаючі сімейства її інтегральних кривих $\Phi(x, y, C) = 0$. Огинаюча це лінія, яка в кожній своїй точці дотична хоча б однієї кривої сімейства $\Phi(x,y,C)=0$ і кожним своїм відрізком дотикається нескінченної кількості цих кривих.

Як що $\Phi(x,y,C)=0$ сімейство інтегральних кривих, то для огинаючої маємо $\Phi(x,y,C(x,y))=0$. Виконаємо диференціювання цього рівняння по x.

$$\frac{d\Phi(x,y,C(x,y))}{dx}=0$$

Отримаємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\Phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0$$

Так як $\Phi(x,y,C)=0$, де С – стала, то $\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0$, бо $\Phi(x,y,C)=0$ це рішення диференціального рівняння. $C(x,y)\neq 0$, тому $\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\neq 0$ і, отже, $\frac{\partial\Phi}{\partial C}=0$. Таким чином, рівняння огинаючої знаходимо вирішивши наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial C}=0\end{cases}\qquad(1.15)$$

Виключаючи С знайдемо рівняння огинаючої.

Приклад. Рівняння траєкторії тіла, кинутого під кутом до горизонту має вигляд

$x=v_0\cos\alpha\, t, y=v_0\sin\alpha\, t-\frac{gt^2}{2}$ або в явному виді $y=x tg\alpha\, t-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, введемо параметр $k=tg\alpha$, тоді $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+k^2$ і рівняння траєкторії приймає вид

$$y=kx-a(1+k^2)x^2$$

де $a=\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Це семейство парабол.

Знайдемо огинаючу до цих парабол. Продиференцюємо $y=kx-a(1+k^2)x^2$ по k, отримаємо $0=x-2kax^2, k=\frac{x}{2a}$, підставимо отримане k в $y=kx-a(1+k^2)x^2$, тоді рівняння огинаючої має вид $y=\frac{1}{4a}-ax^2$. Це парабола, і називається вона параболою безпеки.

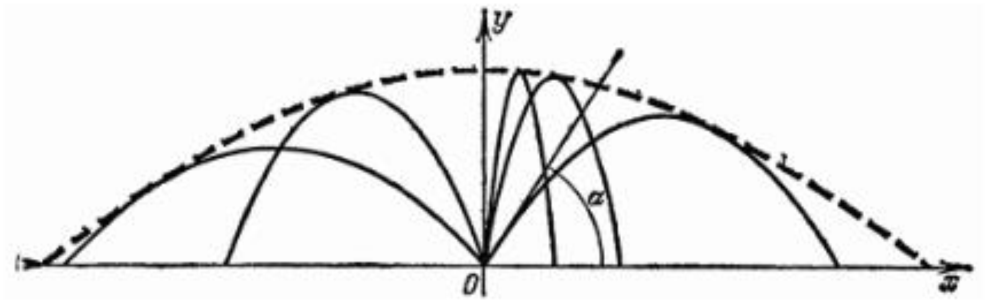


Рис. 11 Траєкторії тел, кинутих під кутом до горизонту, і їх огинаюча – парабола безпеки.

Задання для вирішення розділ 1.

Вирішити диференціальні рівняння.

1. $tg\, y dx - ctg\, x dy = 0$
2. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0$
3. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
4. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3$
5. $ydx - xdy = x^2 ydy$
6. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$
7. $y \sin x + y' \cos x = 1$
8. $y' = e^{x-y}$
9. $\dfrac{dx}{dt} = x + \sin t$
10. $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$
11. $xy(y')^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$
12. $(y')^2 = 9y^4$
13. $\dfrac{dx}{dt} = e^{x/t} + x/t$
14. $x^2 + (y')^2 = 1$
15. $y = xy' + 1/y$
16. $x = (y')^2 - y' + 2$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^2}$
18. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$
19. Знайти ортогональні траєкторії сімейства $x^2 + y^2 = 2ax$.

20. Вважаючи швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційною різниці між температурою тіла і повітря, вирішити задачу за умов, що температура повітря 20 ^{0}C і тіло за 20 хв. охолоджується від 100 ^{0}C до 60 ^{0}C, то за який час температура тіла досягне 30 ^{0}C.
21. Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю 10 км/год. На повному русі його двигун вимикають і через 20 сек. швидкість човна зменьшується до 6 км/год. Визначити швидкість човна через 2 хв. після зупинку двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху човна.
22. Маємо рівняння $y' = \sqrt[3]{x-5y}+2$ чи має воно особливе рішення?
23. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^3}$ при $t = 2, x = 4$
24. $y = xy' + (y')^2$ при $x = 2, y = -1$
25. $y' - \frac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0$

Розділ 2. Диференціальні рівняння порядку вище першого

Розглянемо диференціальні рівняння порядку вище першого. Найвідоміше рівняння такого виду це другий закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t) \quad (2.1)$$

Методи вирішення таких рівнянь мають свої особливості.

У загальному вигляді диференціальне рівняння n–того порядку вирішене відносно вищої похідної має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

або в разі якщо рівняння не можливо вирішити щодо вищої похідної:

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0\,. \quad (2.3)$$

Чи існує єдине рішення такого рівняння?

Теорема про існування та єдиність рішень диференціальних рівнянь n – того порядку

Теорему існування і єдиності рішення в разі рівняння n–того порядку можна отримати, звівши рівняння n–того порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку введенням нових невідомих.

І так розглянемо рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y' ... y^{(n-1)})$ і зробимо заміни

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \ldots \\ y_{n-2}' = y_{n-1}, \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Тоді до рівнянь цієї системи може бути застосована теорема про існування і єдиності розв'язків диференціального рівняння першого порядку.

І тому можливо сформулювати теорему для рівняння n–того порядку.

Теорема. Існує єдине рішення диференціального рівняння n–того порядку $y^{(n)} = f(x, y, y' ... y^{(n-1)})$ *задовольняє умовам* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0'', \ldots$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ *якщо в околиці початкових значень* $\left(x_0, y_0, y_0', y_0'', .. y_0^{(n-1)}\right)$ *функція* $f(x, y, y' ... y^{(n-1)})$ *є безперервною функцією своїх аргументів і задовольняє умові Ліпшиця по всіх аргументів, починаючи з другого.*

Способи пониження порядку рівняння

Нам відомі способи вирішення диференціальних рівнянь першого порядку, тому перша спроба вирішити диференціальні рівняння n–того порядку це зниження порядку до першого методом введення нових невідомих.

1. Рівняння що не містять шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} ..., y^{(n)}) = 0$. Робимо заміну $y^{(k)} = p$, це дає можливість знизити порядок рівняння до $(n-k)$.

Приклад. Вирішити рівняння $\frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$. Робимо заміну $\frac{d^4 y}{dx^4} = p$, тоді рівняння зводиться до $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0$, тоді $p = C_1 x$, і виконавши послідовні інтегрування отримаємо $y = \frac{1}{5!} C_1 x^5 + \frac{1}{3!} C_2 x^3 + \frac{1}{2!} C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

2. Рівняння, що не містить незалежної змінної x, тобто $F(y, y' ... y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Вводимо нову змінну $y' = p(y)$ це дозволяє отримати диференціальне рівняння щодо нової змінної на одиницю менше, ніж рівняння для у. При введенні нової змінної слід переписати початкове рівняння до рівняння відносно нової змінної.

$$\frac{dy}{dx}=p$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p$$

і так далі.

Приклад. Вирішити рівняння $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$.

Робимо заміну $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, тоді рівняння приймає вид $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$ або $p\left(y\frac{dp}{dy}-p\right)=0$ його рішення $p=0, y=C_1$ і $y\frac{dp}{dy}-p=0, p=C_2y, \frac{dy}{dx}=C_2y, y=C_3e^{C_2x}$.

3. Ліва частина рівняння $F(x,y,y'...y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ є похідною деякого диференціального виразу $(n-1)$ порядку $\Phi(x,y,y'...y^{(n-1)})=C$. В цьому випадку переходимо до диференціального рівняння $\Phi(x,y,y'...y^{(n-1)})=C$ з порядком на одиницю меньшим. Іноді можливо отримати повну похідну помноживши вихідне рівняння на інтегруючий множник.

Приклад. Вирішити рівняння $yy''+(y')^2=0$.

Перепишемо це рівняння $y\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}=0$ легко побачити, що рівняння можливо записати як $\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right)=0$, тоді $y\frac{dy}{dx}=C_1$ і проінтегрувавши ще раз, остаточно отримаємо $\frac{y^2}{2}=C_1x+C_2$.

4. Рівняння $F(x,y,y'...y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ однорідне відносно своїх аргументів, тобто $F(kx,ky,ky'...ky^{(n-1)},ky^{(n)})=k^pF(x,y,y'...y^{(n-1)},y^{(n)})$, де p – порядок однорідності. Порядок таких диференціальних рівняння знижується на единицю заменою $y=e^{\int zdx}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Переходимо до нової змінної $y'=e^{\int zdx}z$, $y''=e^{\int zdx}(z^2+z')$ и т.д. Як бачимо, при переході похідні від y виражаються через похідні від z на порядок меньше.

Приклад. Вирішити рівняння $yy''-(y')^2=6xy^2$.

Рівняння є однорідною функцією порядку 3. Робимо заміну $y = e^{\int z dx}$, $y' = e^{\int z dx} z$, $y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z')$ та отримуємо нове рівняння $z' = 6x,$ інтегруємо його $z = 3x^2 + C_1, y = e^{\int (3x^2 + C_1) dx} = C_2 e^{x^3 + C_1 x}$.

Лінійні диференціальні рівняння n−того порядку

Розглянемо окремий вид диференціальних рівнянь – лінійні диференціальні рівняння n−того порядку. Це рівняння виду

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = \varphi(x) \quad (2.5)$$

Якщо права частина дорівнює нулю, то таке рівняння називається однорідним:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

Якщо $a_0(x)$ не дорівнює нулю на відрізку $a \le x \le b$, де шукається рішення диференціального рівняння, то однорідне рівняння можна привести до виду поділивши все на $a_0(x)$

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (2.6)$$

Якщо функції $p_i(x)$ безперервні на відрізку $a \le x \le b$, то в околиці будь−яких початкових значень $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 \in (a,b)$, повністю виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язку.

Лінійність і однорідність рівняння зберігається при будь−яких замінах виду $x = \psi(t),$ де $\psi'(t) \ne 0$, так як $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{dx/dt} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\psi'(t)}$ або заміни виду $y = \gamma(x) z(x),$ де $z(x)$ нова невідома функція.

Запишемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

трохи в іншому вигляді $L[y] = 0$, де L − лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x) \quad (2.7)$$

Оператором цей математичний об'єкт називається тому, що сенс він набуває тоді, коли починає діяти на функцію, в разі диференціального рівняння на функцію $y(x)$. Його лінійність обумовлена наступними його властивостями:

1) $L[Cy] = CL[y]$ − постійний множник можливо виносити за знак оператора;
2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Наведені властивості − це загальні властивості всіх лінійних операторів самої різної природи.

У разі диференціального рівняння, якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є його рішеннями, то і $y_1(x)+y_2(x)$ так само є рішенням. Якщо функція $y(x)$ комплексна, тобто $y(x)=u(x)+iv(x)$, тоді $L[y]=0$ зводиться до $L[u(x)+iv(x)]=0$ або $L[u(x)]+iL[v(x)]=0$ звідки випливає, що і дійсна частина $y(x)$ – $u(x)$ і комплексна – $v(x)$ є рішеннями диференціального рівняння.

При вирішенні диференціального рівняння n–того порядку возникає n вільних констант C_i і в силу особливостей лінійних операторів спільне рішення диференціального рівняння $L[y]=0$ повинно мати вигляд

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x) \quad (2.8)$$

де $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – лінійно незалежні функції, що складають *фундаментальну систему рішень лінійного однорідного рівняння*. Як бачимо, ми знаємо структуру відповіді рішення диференціального лінійного рівняння n–того $L[y]=0$. Мета знайти n лінійно незалежних функцій, що задовольняють це рівняння[10]. Надамо визначення протилежної ситуації.

Які функції називаються лінійно незалежними?

Функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ називаються лінійно залежними на відрізку $a \le x \le b$, якщо існують постійні $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ такі, що на цьому відрізку

$$\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+...+\alpha_ny_n(x)=0 \quad (2.9)$$

причому, хоча б одне $\alpha_i \ne 0$. Якщо наведена тотожність справедлива тільки при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, то функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на відрізку $a \le x \le b$.

Приклад. Функції $x, x^2,..., x^n$ є лінійно незалежними функціями.

Теорема. Якщо функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ лінійно залежні на відрізку $a \le x \le b$, то на цьому відрізку визначник

$$W(x)=W[y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

званий визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.

Теорема. Якщо функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ є рішеннями диференціального рівняння $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ з безперервними на відрізку $a \le x \le b$ функціями $p_i(x)$, то визначник Вронського не може звернутися в нуль ні в одній точці відрізка $a \le x \le b$.

---

[10] У випадку нелінійних рівнянь пошук рішень є складнішим і вид відповіді невідомий.

Якщо відоме рішення однорідного диференціального рівняння $y_1(x)$, порядок рівняння $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ або $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$ можливо знизити на одиницю введенням нової невідомої функції $y=y_1\int u(x)dx$.

Завдання. Знизити порядок рівняння $xy''-xy'+y=0, y_1(x)=x$.

Формула Остроградського−Ліувілля.

Рішення диференціального рівняння є суперпозиція $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, тому

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

Якщо розкласти цей визначник за елементами останнього рядка то

отримаємо $W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]y^{(n)}-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)}+...=0$

Ясно, що розділивши на $W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]$, отримаємо надане диференціальне рівняння і тоді

$$p_1(x)=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]}$$

але

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}W(x)$$ [11]

або

$$p_1(x) = -\frac{\frac{dW(x)}{dx}}{W(x)} \quad (2.11)$$

розділяючи змінні отримаємо, що $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}$.

Це співвідношення називається формула Остроградського[12] −Ліувілля.

Інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР) другого порядку з постійними коефіцієнтами

Окремим випадком розглянутих вище лінійних, однорідних диференціальних рівнянь є ЛОДР з постійними коефіцієнтами.

Нехай дано ЛОДР другого порядку

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (2.12)$$

де p і q постійні.

Для знаходження загального рішення рівняння (2.12) досить знайти два його часткових рішень, що утворюють фундаментальну систему.

Будемо шукати приватні рішення рівняння (2.12) у вигляді $y = e^{kx}$, де k — деяке число (запропоновано Л. Ейлером). Диференціюючи цю функцію два рази і підставляючи вирази для y, y' і y'' в рівняння (2.12), отримаємо: $k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0$, т.е.

---

[11]) Похідна від визначника

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\left(f_{11}(x) f_{22}(x) - f_{12}(x) f_{21}(x)\right) = f_{11}'(x) f_{22}(x) + f_{11}(x) f_{22}'(x) -$$

$$- f_{12}'(x) f_{21}(x) - f_{12}(x) f_{21}'(x) = f_{11}'(x) f_{22}(x) - f_{12}'(x) f_{21}(x) + f_{11}(x) f_{22}'(x) - f_{12}(x) f_{21}'(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) \end{vmatrix}$$

[12]) **Михайло Васильович Остроградський** (12 (24) вересня 1801, Пашенівка, нині Козельщинського району Полтавської області — 20 грудня 1861 (1 січня 1862), Полтава, Російська імперія) — український математик, механік і фізик. Належав до козацько−старшинського роду Остроградських, що походив від бунчукового товариша Івана Остроградського, який жив у XVII ст.. Миха́йло Остроградський вважається одним з провідних математиків середини XIX ст. У 2001 році ЮНЕСКО внесла Михайла Васильовича Остроградського до списку видатних математиків світу.

$$e^{kx} \cdot (k^2 + pk + q) = 0, \text{ або } k^2 + pk + q = 0 \quad (e^{kx} \neq 0) \qquad (2.13)|$$

Рівняння (2.13) називається характеристичним рівнянням ДУ (2.12) (для його складання досить в рівнянні (2.12) замінити y'', y' і y відповідно на k^2, k і 1).

При вирішенні характеристичного рівняння (2.13) можливі наступні три випадки:

Випадок 1. Корені k_1 і k_2 рівняння (2.13) є дійсні і різні

$$k_1 \neq k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q > 0 \right).$$

В цьому випадку часткові рішеннями рівняння (2.12) є функції $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Вони утворюють фундаментальну систему рішень (лінійно незалежні), так як їх вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 + k_2)x} - k_1 e^{(k_1 + k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2.12) має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (2.14)$$

Приклад 2.12. Вирішити рівняння y'' − 5y′ + 6y = 0.

Рішення*:* Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Вирішуємо його: $k_1 = 2$, $k_2= 3$. Записуємо загальне рішення даного рівняння $y = c_1$e2x + c_2e3x, де c_1 і c_2— вільні константи.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння (2.13) дійсні і рівні:

$$k_1 = k_2 \left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0, \quad k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \right).$$

У цьому випадку маємо лише одне часткове рішення $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажемо, що окрім y_1 рішенням (2.12) буде і $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Дійсно, підставимо функцію y_2 в рівняння (2.12). Маємо:

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = (xe^{k_1x})'' + p(xe^{k_1x})' + q(xe^{k_1x}) =$$
$$= (2k_1e^{k_1x} + xk_1^2e^{k_1x}) + p(e^{k_1x} + xk_1e^{k_1x}) + q(xe^{k_1x}) =$$
$$= e^{k_1x}(2k_1 + k_1^2x + p + pxk_1 + qx) = e^{k_1x}(x(k_1^2 + pk_1 + q) + (p + 2k_1).$$

Але $k_1^2 + pk_1 + q = 0$, так як k_1 є коренем рівняння (2.13); $p + 2k_1 = 0$, бо $k_1 = k_2 = -p/2$

Тому $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$, таким чином функція $y_2 = xe^{k_1x}$ є рішенням рівняння (2.12).

Часткові рішення $y_1 = xe^{k_1x}$ і $y_2 = xe^{k_1x}$ складають фундаментальну систему рішень: $W(x) = xe^{k_1x} \neq 0$. Отже, в цьому випадку загальне рішення ЛОДР (2.12) має вигляд

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2xe^{k_1x} \qquad (2.15)$$

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння (2.13) комплексні: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$

$$\left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \right).$$

В цьому випадку приватними рішеннями рівняння (2.12) є функції $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ і $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$. За формулами Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

маємо

$$y_1 = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Знайдемо два дійсних часткових рішення рівняння (2.12). Для цього складемо дві лінійні комбінації рішень y_1 и y_2:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \tilde{y}_1, \qquad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \tilde{y}_2.$$

Функції $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ є рішеннями рівняння (2.12), що випливає з властивостей рішень ЛОДР другого порядку. Ці рішення $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ утворюють фундаментальну систему рішень, так як $W(x) \neq 0$ (дослідити самостійно). Тому загальний розв'язок рівняння (2.12) запишеться у вигляді
$y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$, або

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) \qquad (2.18)$$

Приклад. Вирішити рівняння y" − 6y′ + 25y = 0.

Рішення*:* Маємо: $k^2 - 6k + 25 = 0$, $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$. За формулою (2.7) отримуємо загальне рішення рівняння:

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

Таким чином, знаходження спільного рішення ЛОДР другого порядку з постійними коефіцієнтами (2.12) зводиться до знаходження коренів характеристичного рівняння (2.13) і використанню формул (2.14) − (2.18) загального рішення рівняння (не вдаючись до обчислення інтегралів).

Інтегрування ЛОДР n−го порядку з постійними коефіцієнтами

Завдання знаходження загалього рішення ЛОДР n−го порядку (n>2) з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \qquad (2.19)$$

де p_i, $i = \overline{1, n}$, – числа, вирішується аналогічно рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Сформулюємо необхідні твердження і розглянемо приклади. Частков рішення рівняння (4.8) також шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, де k — постійне число.

Характеристичним для рівняння (4.8) є алгебраічне рівняння n−го порядку виду

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0, \qquad (2.20)$$

Рівняння (2.18) має, як відомо, n коренів (в їх числі можуть бути комплексні). Позначимо їх через $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Зауваження. Не всі з коренів рівняння (2.18) повинні бути різними. Так, зокрема, рівняння $(k - 3)^2 = 0$ має два рівних кореня $k_1 = k_2 = 3$. В цьому випадку кажуть, що корень один (k = 3) та він має кратність 2. Якщо кратність кореня дорівнює одиниці, його називають простим.

Випадок 1. Все коріння рівняння (2.18) дійсні і прості (різні). Тоді функції $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$ є частковими рішеннями рівняння (4.8) і утворюють фундаментальну систему рішень (лінійно незалежні). Тому загальний розв'язок рівняння (4.8) записується у вигляді

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$$

Приклад. Знайти загальне рішення рівняння $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Рішення: Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$ має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Отже, $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ — загальне рішення даного рівняння.

Випадок 2. Все коріння характеристичного рівняння дійсні, але не всі прості (є корені, що мають кратність більше 1). Тоді кожному простому корені k відповідає одне часткове рішення виду e^{kx}, а кажному кореню k кратності $m > 1$ відповідає m часткових рішень: e^{kx}, xe^{kx}, $x^2 e^{kx}$ …, $x^{m-1} e^{kx}$.

Приклад. Вирішити рівняння $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

Рішення: Характеристичне рівняння

$$k^4 - k^3 - 3k^2 + 5k - 2 = (k + 2)(k - 1)3 = 0$$

має корені $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$. Отже, $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x} + c_4 x^2 e^{x}$ – загальне рішення рівняння.

Випадок 3. Серед коренів рівняння (2.18) є комплексно–зв'язані коріння. Тоді кожній парі $\alpha \pm \beta i$ простих комплексно–сполучених коренів відповідає два приватних рішення $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а кажній парі $\alpha \pm \beta i$ коренів кратності $m>1$ відповідає 2m часткових рішень виду

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{m-1}\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ці рішення, як можливо довести за допомогою визначника Вронського, утворюють фундаментальну систему рішень.

Приклад. Вирішити рівняння $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Рішення: Характеристичне рівняння

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$$

має корені $k_1 = -1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$, $k_4 = i$, $k_5 = -i$. Отже,

$$y = c_1 e^{-x} + c_2\cdot\cos x + c_3\cdot\sin x + c_4 x\cdot\cos x + c_5 x\cdot\sin x$$

– загальне рішення рівняння.

Вирішення диференціального рівняння коливань.

Запишемо рівняння коливань з тертям. Це є другий закон Ньютона.

Рис. 12 Коливання тіла закріпленого на пружині.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-2m\gamma\frac{dx}{dt}$$

$m\frac{d^2x}{dt^2}$ − добуток маси на прискорення тіла, $-kx$ − пружня сила, k − коєфіцієнт пружності пружини, $-2m\gamma\frac{dx}{dt}$ − сила в'язкого тертя, $2m\gamma$ − коєфіцієнт в'язкого тертя.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2m\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Спростимо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

ω_0 має фізичний сенс − це частота влачних коливань системи.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0$$

Корені характеристичного рівняння дорівнюють:

$$\lambda_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$$

Розглянемо наступні випадки ($\gamma>0$ − декремент[13] затухання, $\gamma<0$ − інкремент[14])

1) $\gamma=0,\lambda_{1,2}=\pm i\omega_0$ (тертя відсутне)

$x=C_1\cos(\omega_0t)+C_2\sin(\omega_0t)$

[13] *від лат. decrementum* — зменьшення, спад

[14] *від лат. incrementum* − збільшення

$\omega_0 >> \gamma, \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} \approx i\omega_0, \lambda_{1,2} \approx -\gamma \pm i\omega_0$

2) $\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = i\omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx i\omega_0(1-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\omega_0^2})$

$(1+x)^n \approx 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+.....,\quad x=\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}$

(коефіцієнт тертя набагато меньше власної частоти коливань)

$x=C_1e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t)+C_2e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t)$

3) $\omega_0 > \gamma, \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = i\omega, \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}, \lambda_{1,2}=-\gamma \pm i\omega$ (коефіцієнт тертя того ж порядку, що і власна частота коливань. Як бачимо змінюється частоти коливань, як що $\omega_0 > \gamma$)

$x=C_1e^{-\gamma t}\cos(\omega t)+C_2e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

В цьому випадку коливання затухаючі і відбуваються з частотою ω.

4) $\omega_0 = \gamma$ (аперіодичний рух, коливання відсутні) $\lambda_{1,2}=-\gamma$

$x=C_1e^{-\gamma t}+C_2te^{-\gamma t}$

5) $\omega_0 < \gamma$ (коливання відсутні)

$x=C_1e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}+C_2te^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$

Початкові умови

$x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0$

Завдання. Знайти C_1 та C_2 через x_0, v_0.

$x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами (ЛНДР)

Структура загального рішення ЛНРУ другого порядку.

Розглянемо ЛНРУ другого порядку

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \qquad (2.19)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, f(x) — задані, безперервні на (a; b) функції. Рівняння

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0, \qquad (2.20)$$

ліва частина якого збігається з лівою частиною ЛНДР (2.19), називається відповідним йому однорідним рівнянням.

Теорема. (Структура загального рішення ЛНДР). Спільним рішенням у рівняння (2.19) є сума його часткового рішення y і загального рішення* $\hat{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ *відповідного однорідного рівняння (2.20), тобто*

$$y = y^* + \hat{y} \qquad (2.21)$$

Переконаємося, що функція (2.21) − рішення рівняння (2.19). Так як y* є рішення рівняння (2.19), а ŷ — рішення рівняння (2.20), то $(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x)$ и $(\hat{y})'' + a_1(\hat{y})' + a_2(x)\hat{y} = 0$

У такому випадку маємо

$$(y^* + \hat{y})'' + a_1(x)(y^* + \hat{y})' + a_2(x)(y^* + \hat{y}) =$$

$$= ((y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^*) + ((\hat{y})'' + a_1(x)(\hat{y})' + a_2(x)\hat{y}) = f(x) + 0 = f(x)$$

Це означає, що функція (y* + y) є рішенням рівняння (2.19). Покажемо тепер, що функція

$$y = y^* + c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (2.22)$$

є загальним розв'язком рівняння (2.19). Для цього треба довести, що з рішення (2.22) можна виділити єдине приватне рішення, яке задовольняє заданим початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y'_0. \qquad (2.23)$$

Продифференцировав функцію (2.22) і підставивши початкові умови (2.23) в функцію (2.22) і її похідну, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0), \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0). \end{cases}$$

де $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$, з невідомими c_1 та c_2. Визначником цієї системи є визначник Вронського $W(x_0)$ для функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ в точці $x = x_0$. Функції $y_1(x)$ и $y_2(x)$ лінійно езалежні (утворюють фундаментальну систему рішень), тобто $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдине рішення: $c_1 = c_1^0,\ c_2 = c_2^0.$

Рішення $y = y^* + c_1^0 y_1(x) + c_2^0 y_2(x)$ є частковим рішенням рівняння, що задовольняє початковим умовам. Теорему доказано.

Рівняння Ейлера. Рівняння виду

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

де a_i – постійні, має назву рівняння Ейлера і за допомогою введення нові незалежної змінної $x = e^t$ зводиться до лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами.

Щоб це зробити необхідно перейти від $\frac{dy}{dx}$ до $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}e^{-t} - e^{-t}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - e^{-2t}\frac{dy}{dt} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Замість переходу до нової незалежної змінної можливо шукати рішення рівняння Ейлера на класі наступних функцій $y = x^k$. Тоді для знаходження k отримуємо характеристичне рівняння

$$a_0k(k-1)...(k-n+1) + a_1k(k-1)...(k-n+2) + ... + a_n = 0$$

У випадку кратних дійсних коренів фундаментальну систему рішень складають функції виду

$$x^{k_i}, x^{k_i}\ln x, x^{k_i}\ln^2 x, ..., x^{k_i}\ln^{\alpha_i - 1} x$$

де α_i – показник кратності кореня k_i.

Як що корені k_i комплексні і дорівнюють $k_i = p \pm qi$, то рішення складається з настної системи функцій

$$x^p\cos(q\ln x), x^p\cos(q\ln x)\ln x, ..., x^p\cos(q\ln x)\ln^{\alpha_i - 1} x$$
$$x^p\sin(q\ln x), x^p\sin(q\ln x)\ln x, ..., x^p\sin(q\ln x)\ln^{\alpha_i - 1} x$$

Приклад. Вирішити рівняння $x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0$.

Рішення. Будемо шукати рішення у виді $y = x^k$. Отримаємо характеристичне рівняння $k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = 0$. Звідки $k_1 = \frac{1}{2}, k_1 = -2$. Відповідно, загальне рішення має вид у випадку $x > 0$ $y = C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-2}$.

Самостійно вирішити наступне рівняння $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Метод варіації довільної сталої

Для вирішення неоднорідного лінійного рівняння, можливо використовувати метод варіації довільної сталої. Суть методу полягає в тому, що на початку знаходять рішення однорідного рівняння, в потім роблять припущення, що довільні постійні залежать від змінної х і підставляючи рішення $y = \sum_{i=1}^{N} C_i(x) y_i(x)$, де $y_i(x)$ – відомі рішення однорідного рівняння, в неоднорідне диференціальне рівняння знаходять невідомі залежності $C_i(x)$. Для цього необхідно знайти $y', y'', ..., y^{(n)}$. Обчислимо y'.

$$y' = \sum_{i=1}^{N} C_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i(x)$$

Ми маємо n вільних констант, а права частина диференціального рівняння тільки одна, тому ми можемо накласти n−1 додаткову умову на вільні константи $C_i(x)$. В якості такої умови вибираємо наступні:

$$\sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i(x) = 0$$

це є частина першої похідної. Коли будемо обчислювати другу похідну то виникає додаток $\sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i'(x)$ його теж дорівнюємо нулю, тобто $\sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i'(x) = 0$

Як що зібрати всі рівняння то отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i'(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i''(x) = 0 \\ .... \\ \sum_{i=1}^{N} C_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

Вирішивши систему відносно $C_i'(x)$, отримаємо диференціальні рівняння першого порядку з розподілюючими змінними відносно $C_i(x)$. Важливо відмітити, що головний визначник системи це визначник Вронського.

Приклад. Вирішити рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Рішення. Загальне рішення однорідного рівняння має вид $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Для вирішення неоднорідного рівняння використаєм метод варіації вільних констант. $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Умови на них

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Звідки $C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $C_2'(x) = 1$. Тоді $C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1^*$, $C_2(x) = x + C_2^*$, а рішення рівняння має вид $y = C_1^* \cos x + \cos x \ln|\cos x| + C_2^* \sin x + x \sin x$.

Інтегрування ЛНДР другого порядку з постійними коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Розглянемо ЛНДР другого порядку з постійними коефіцієнтами, то б то рівняння $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ (2.24)

де p і q — деякі числа.

Згідно з теоремою, загальний розв'язок рівняння (2.24) являє собою суму загального рішення ŷ відповідного однорідного рівняння і часткового рішення y* неоднорідного рівняння. Часткове рішення рівняння (2.24) може бути знайдено методом варіації довільних сталих.

Для рівнянь з постійними коефіцієнтами (2.24) існує більш простий спосіб знаходження y*, як що права частина f(x) рівняння (2.24) має так званий «спеціальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

або

II. $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos\beta x + Q_n(x) \sin\beta x)$.

Суть методу, званого методом невизначених коефіцієнтів, полягає в наступному: по виду правої частини f(x) рівняння (2.24) записують очікувану форму приватного рішення з невизначеними коефіцієнтами, потім підставляють її в рівняння (2.24) і з отриманої тотожності знаходять значення коефіцієнтів.

Випадок 1. Права частина (2.24) має вид $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$, де $\alpha \in R$, $P_n(x)$ — многочлен ступеня n. Рівняння (2.24) запишеться у вигляді

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \qquad (2.25)$$

В цьому випадку часткове рішення y* шукають у виді:

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \qquad (2.26)$$

де r — число, що дорівнює кратності α кореня характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ (тобто r — число, що показує, скількі разів α коренем рівняння $k^2 + pk + q = 0$), а $Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ — многочлен степені n, записаний з невизначенними коефіцієнтами A_i (i = 1, 2,..., n).

а) Хай α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0,$$

тобто $\alpha \neq k_{1,2}$. Отже,

$$r = 0,$$
$$y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},$$
$$(y^*)' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha,$$
$$(y^*)'' = Q_n''(x) \cdot e^{\alpha x} + 2Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha^2.$$

Після підстановки функції y* і її похідних в рівняння (2.19), скорочення на $e^{\alpha x}$, отримаємо:

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) \cdot Q_n(x) = P_n(x). \qquad (2.27)$$

Зліва − многочлен ступеня n з невизначеними коефіцієнтами, праворуч − многочлен ступеня n, але з відомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, отримаємо систему (n+1) алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A_0, A_1, …, A_n.

б) Хай α є однократним (простим) коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку шукати рішення в формі $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$ не можна, так як $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, і рівняння (2.193) приймає вид

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) = P_n(x).$$

У лівій частині − многочлен ступеня (n−1), в правій частині − многочлен ступеня n. Щоб отримати тотожність многочленів в рішенні y*, потрібно мати многочлен ступеня (п+1). Тому часткове рішення y* слід шукати у вигляді $y^* = x \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$ (в рівністі (2.26) вибрано r = 1).

в) Хай α є двократним коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, т. е. $\alpha = k_1 = k_2$. В цьому випадку $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$, а тому рівняння (5.9) приймає вид $Q''_n(x) = P_n(x)$

Зліва стоїть многочлен ступеня (n–2). Зрозуміло, щоб мати зліва многочлен ступеня n, приватне рішення y* слід шукати у вигляді

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$$

(в рівністі (2.26) вибрано r = 2).

Випадок 2. Права частина (2.19) має вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \sin\beta x),$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени ступеня n і m, відповідно, α і β — дійсні числа. Рівняння (2.24) запишеться у наступному виді

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x) \qquad (2.19)$$

Можна показати, що в цьому випадку часткове рішення y* рівняння (2.19) необхідно шукати у виді

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x) \qquad (2.19)$$

де r — число, рівне кратності α + βi як кореня характеристичного рівняння $k^2+pk+q= 0$, $M_l(x)$ і $N_l(x)$ — многочлени ступені l з невизначеними коефіцієнтами, l — найвищий ступінь многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ т. е. l = max(n,m).

Зауваження.

1. Після підстановки функції (2.19) в (2.19) прирівнюють многочлени, які стоять перед однойменними тригонометричними функціями лівої і правої частинах рівняння.

2. Форма (2.191) зберігається і в випадках, коли $P_n(x) \equiv 0$ або $Q_m(x) \equiv 0$.

3. Якщо права частина рівняння (2.24) є сума функцій виду I мул II, то для знаходження y* слід використовувати теорему 2.20 про накладення рішень.

Теорема 2.20. (Про накладення рішень). Якщо права частина рівняння (2.19) являє собою суму двох функцій: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, а y_1^* і y_2^* — часткові рішення рівнянь $y''+a_1(x)\cdot y'+a_2(x)\cdot y=f_1(x)$ і $y''+a_1(x)\cdot y'+a_2(x)\cdot y=f_2(x)$ відповідно, то функція $y^*=y_1^*+y_2^*$ є рішенням даного рівняння.

Приклад. Знайти спільне рішення рівняння $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Рішення: Знайдемо загальний розв'язок $y(x)$ ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корень $k_1=1$ кратність його 2. Тобто, $y(x)=c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$. Знаходимо часткове рішення рівняння. У нього права частина $x - 4 = (x - 4)\cdot e^0 \cdot x$ має вид $P_1(x)\cdot e^0 \cdot x$, де $\alpha = 0$, не є коренем характеристичного рівняння: $\alpha \neq k_1$. Тому, відповідно до формули (2.192), часткове рішення y^* шукаємо у виді $y^* = Q_1(x)\cdot e^0 \cdot x$, то б то $y^* = Ax+B$ де A і B — невизначені коефіцієнти. Тоді $(y^*)' = A$, $(y^*)'' =0$. Підставляємо y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в надане рівняння, та отримаємо $-2A + Ax + B = x - 4$, або $Ax + (-2A + B) = x - 4$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях x, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + B = -4. \end{cases}$$

Звідки $A = 1$, $B = -2$. Тому часткове рішення даного рівняння має вигляд $y^* = x - 2$. То б то, $y = (\hat{y} + y^*) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x - 2$ — шукане загальне рішення рівняння.

Приклад. Вирішити рівняння $y'' - 4y' + 13y = 40\cdot\cos 3x$;.

Рішення: Загальне рішення ЛНДР має вигляд $y = \hat{y} + y^*$. Знаходимо рішення однорідного рівняння $\hat{y}$: $y'' - 4y'+13y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ має корені $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$. То б то, $\hat{y} = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

Знаходимо часткое рішення y^*. Права частина ЛНДР в цьому випадку має вид $f(x) = e^0 \cdot x \cdot (40\cdot\cos 3x + 0\cdot\sin 3x)$. Так як $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $\alpha + \beta i = 3i$ не збігається з коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$. Відповідно до формули (2.195), приватне рішення шукаємо у вигляді $y^* = A \cos 3a$; $4- B \sin 3a$:. Підставляємо y^* в надане рівняння. Маємо: $(y^*)' = -3A\cdot\sin 3x+3B\cdot\cos 3x$, $(y^*)'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$. Отримуємо:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)+13(A\cos 3x +B\sin 3x) = =40\cos 3x,$$

або

$$(-9A - 12B + 13A) \cos 3x + (-9B + 12A + 13B) \sin 3x = 40\cos 3x + 0\cdot\sin 3x.$$

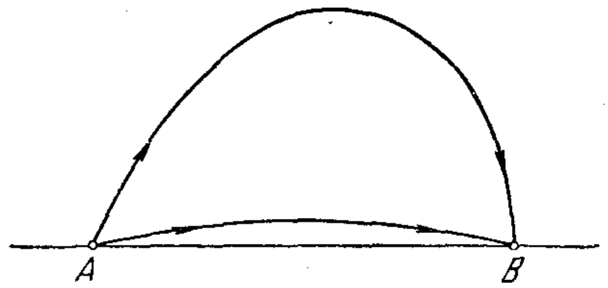
Звідси маємо:

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 12A + 4B = 0. \end{cases}$$

Отже, A = 1, B = −3. Тому $y^* = \cos 3x - 3\sin 3x$. І на останок, $y = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ — спільне рішення рівняння.

Крайова задача

Розглянемо ще одну відмінність між диференціальними рівняннями першого порядку та диференціальними рівняннями вищих порядків. Як що для диференціального рівняння першого порядку можливо задати лише початкові умови, то б то сформулювати задачу Коші $y(x_0) = y_0$, то вже у випадку, наприклад, рівнянь другого порядку можливо сформулювати крайову задачу, то б то вимагати знайти рішення, що проходить через дві задані точки. Відмінність крайової задачі складається в тому, що в цьому випадку можливо мати наступні випадки: або рішення зовсім відсутнє, або рішення існує одне, або існує безліч таких рішень. Наприклад, саме постанова крайової задачі в квантовій механиці призводить до такого явища як квантування, то б то дискретності спектру знайдених рішень диференціального рівняння.



Мал. 14 Суть крайової задачі – вимога проходження інтегральної кривої через задані точки A і B.

До крайових задач відноситься так звана балістична задача (Мал. 14)

Приклад. Знайти рішення рівняння $y'' + y = 0$ з граничними умовами: $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$. Рішення. Як відомо, загальне рішення цього рівняння $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. З граничної умови знаходимо, що $C_1 = 0$, тоді $y = C_2 \sin x$. Якщо $x_1 \neq n\pi$, то $C_2 = \dfrac{y_1}{\sin x_1}$. Тоді отримуємо єдине рішення $y = \dfrac{y_1}{\sin x_1} \sin x$.

Як що, $x_1 = n\pi$ та $y_1 = 0$ то всі криві виду $y = C_2 \sin x$ є рішеннями, а як що $x_1 = n\pi$ та $y_1 \neq 0$, то рішень не існує.

Інколи зручно при вирішенні крайової задачі змінити змінну, то отримати нульові крайові умови.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$
$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

Зробимо лінійну заміну

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$$

Так зміна залишає рівняння лінійним, але крайові умови приймають вид $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

Задачі для вирішення розділ 2.

1. $y^{II} + y^{I} - 2y = 0$
2. $5y^{II} - 35y^{I} + 60y = 0$
3. $3y^{II} + 3y^{I} - 90y = 0$
4. $y^{II} - \frac{1}{4}y^{I} - \frac{1}{8}y = 0$
5. $2y^{II} - 2y^{I} - 4y = 0$
6. $y^{III} - 4y^{I} = 0$
7. $y^{III} = 0$
8. $y^{VI} = 0$
9. $y^{IV} - 2y^{II} + y = 0$
10. $y^{VI} + y^{IV} - y^{II} - y = 0$
11. $2y^{II} + 4y^{I} + 6y = 0$
12. $3y^{II} + 6y^{I} + 18y = 0$
13. $y^{II} + 3y^{I} + 8y = 0$
14. $y^{IV} + 2y^{II} + y = 0$
15. $y^{VI} + 3y^{IV} + 3y^{II} + y = 0$
16. $y^{II} + y^{I} - 2y = x$
17. $y^{II} + y^{I} - 2y = e^{x}$
18. $y^{II} + y^{I} - 2y = e^{x} cosx$
19. $y^{II} + y^{I} - 2y = e^{x}\sin x$
20. $y^{III} = 2$
21. $y^{III} = x$
22. $y^{III} = e^{x}$
23. $y^{III} = xe^{x}$

24. $2y^{II}+4y^{I}+6y=e^{-x}\cos\sqrt{2}x$

25. $2y^{II}+4y^{I}+6y=e^{-x}sin\sqrt{2}x$

26.

27. $y''-6y+10y=100, y(0)=10, y'(0)=5$

28. $\ddot{x}+x=\sin t-\cos 2t$

29. $y'y'''-3(y'')^2=0$

30. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$

31. $x^2y''-4xy'+6=2$

32. $y''+y=ch\,x$

33. $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$

34. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=e^t+e^{2t}+1$

35. $(1+x)y''+(y')^2+1=0$

36. $x^3\dfrac{d^2x}{dt^2}+1=0$

37. $y^{IV}-16y=x^2-e^x$

38. $\left(y'''\right)^2+(y'')^2=1$

39. $\dfrac{d^6x}{dt^6}-\dfrac{d^4x}{dt^4}=1$

40. $\dfrac{d^4x}{dt^4}-2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=t^2-3$

41. $y''+y=1-\dfrac{1}{\sin x}$

42. Знайти закон руху тіла, що падає в повітрі без початковій швидкості. Сила спротиву пропорційна квадрату швидкості, а максимальна швидкість яку може досягти тіло дорівнює 75 км/год.

43. Ланцюг довжиною L метрів зісковзує зі столу. На початку руху L_0 ланцюга звисало зі столу. За який час ланцюг зісковзує зі столу. Тертя відсутнє.

44. Ланцюг перекинуто через цвях. В початковий момент часу з одного боку було 8 м ланцюга, а з іншого 10 м. За який час ланцюг зісковзує з цвяха? Третя відсутнє.

45.Поїзд рухається горизонтально. Вага поїзда P, сила тяги F, сила спротиву руху $W = a + bx$, де a, b − константи, v − швидкість, s − пройдений шлях. Знайти закон руху поїзда, за умовами $s(0) = 0$, $v(0) = 0$.

46. Два однакових тіла підвішені до кінця пружини. Знайти закон руху одного тіла у випадку, як що друге обірвалось. Пружина подовжується у випадку одного тіла на а см.

Розділ 3. Системи диференціальних рівнянь

Існують різні методи вирішення диференціальних рівнянь. Однією із можливостей є зведення диференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Часто так система за допомогою комп'ютера вирішується простіше ніж одне рівняння, але більш високого порядку ніж перший.

Наприклад. Розглянемо добре відомий другий закон Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$$

Напишемо це векторне рівняння в проекціях на вісі декартової системи координат

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}$$

Як що ввести нові змінні $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$, то отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ m\dfrac{du}{dt} = F_x(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dfrac{dv}{dt} = F_y(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dfrac{dw}{dt} = F_z(t, x, y, z, u, v, w) \end{cases} \quad (3.1)$$

Таку систему можливо доповнити початковими умовами.

В загальному виді систему диференціальних рівнянь можливо записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

з початковими умовами $x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, ..., n$.

Така система має рішення і воно є єдине при заданих початкових умовах як що:

1) функції $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), i = 1, ..., n$ безперервні;
2) $\dfrac{\partial f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}, \; i, j = 1, ..., n$ існують та обмежені за модулем.

В векторному n вимірному просторі систему диференціальних рівнянь можливо записати як

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X),$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-вимірний вектор , $F(t, X) = (f_1, f_2, ..., f_n)$ – n-вимірний вектор, а початкові умови мають вид $X(t_0) = X_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n,0})$.

В евклідовому просторі $\frac{dX}{dt}$ можливо трактувати як швидкості, простір $(x_1, x_2, ..., x_n)$ має назву фазового простору, а система $\frac{dX}{dt} = F(t, X)$ називається динамічною, а рішення $X(t)$ − це фазова траєкторія.

Динамічна система в заданий момент часу t визначає поле швидкостей в n-вимірному просторі. Як що вектор – функція $F(t, X)$ залежить від часу явно, то поле швидкостей змінюється з часом и фазові траєкторії можуть перетинатися. Як що F не залежить від часу явно, а лише опосередковано через залежності $x_i(t)$ то поле швидкостей є стаціонарним, а рух у фазовому просторі усталений.

Інтегрування систем диференціальних рівнянь

Як що задано систему із n диференціальних рівнянь першого порядку, то можливо перейти до диференціального рівняння n–того порядку відносно однієї невідомої функції та вирішити це рівняння, а потім знайти останні невідомі функції.

Наприклад. Вирішити систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Продиференцюємо перше рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$, тоді використаємо друге рівняння та отримаємо $\frac{d^2x}{dt^2} = x$, $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ рішення $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$, тоді з першого рівняння $y = \frac{dx}{dt}$ отримаємо $y = C_1e^t - C_2e^{-t}$. Як що для знаходження у використати не перше , а друге рівняння $\frac{dy}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = C_1e^t + C_2e^{-t}$, то $y = C_1e^t - C_2e^{-t} + C_3$. Перевірка показує, що надану систему задовольняє лише випадок коли $C_3 = 0$.

Знаходження інтегрованої комбінації.

Приклад. Вирішити систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Рішення. Виконаємо деяки перетворення.

$$\begin{cases} \dfrac{d(x+y)}{dt} = x+y \\ \dfrac{d(x-y)}{dt} = -(x-y) \end{cases}$$

Як бачимо система розпадається на два рівняння? які можливо про інтегрувати окремо та отримати $\ln(x+y) = t + \ln C_1, \ln(x+y) - \ln C_1 = t, \ln\dfrac{(x+y)}{C_1} = t, x+y = C_1e^t$, аналогічно знаходимо, що $x-y = C_2e^{-t}$, а тоді $x = \dfrac{1}{2}\left(C_1e^t + C_2e^{-t}\right)$ і $y = \dfrac{1}{2}\left(C_1e^t - C_2e^{-t}\right)$. Вільні константи можливо змінити і отримати відповідь, що співпадає з по переднею $x = C_1^*e^t + C_2^*e^{-t}$ і $y = C_1^*e^t - C_2^*e^{-t}$.

Системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

Це рівняння виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1, 2, ..., n$$

Рішення шукають у виді $x_i = b_ie^{kt}$. В якості приклада розглянемо системи.

Приклад 1. Вирішити систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$

Шукаємо рішення $x = b_1e^{kt}, y = b_2e^{kt}$. Підставимо

$$\begin{cases} b_1ke^{kt} = b_1e^{kt} + 2b_2e^{kt} \\ b_2ke^{kt} = 4b_1e^{kt} + 3b_2e^{kt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1k = b_1 + 2b_2 \\ b_2k = 4b_1 + 3b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(k-1)-2b_2=0 \\ -4b_1+b_2(k-3)=0 \end{cases}$$

Це система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь. Вона має не тривіальне рішення у випадку коли

$$\begin{vmatrix} k-1 & -2 \\ -4 & k-3 \end{vmatrix}=0$$

Це співвідношення має назву характеристичного рівняння. Розкриваємо визначник та отримаємо $k^2-4k-5=0, k_1=-1, k_2=5$.

Розглядаємо:

Випадок перший, корінь: $k_1=-1$. Беремо і підставляємо його в рівняння $b_1(k-1)-2b_2=0$, $b_1(-1-1)-2b_2=0, b_2=-b_1$, тоді $x_1=b_1e^{-t}, y_1=-b_1e^{-t}$.

Другий корінь $k_2=5$ Беремо і підставляємо його в рівняння $b_1(k-1)-2b_2=0$, $b_1(5-1)-2b_2=0, b_2=2b_1$, тоді $x_1=b_1e^{5t}, y_1=2b_1e^{5t}$. Загальне рішення системи

$$\begin{cases} x=b_1e^{-t}+b_2e^{5t}, \\ y=-b_1e^{-t}+2b_2e^{5t} \end{cases}$$

Вільні константи b_1, b_2 можливо позначити іншими буквами та записати відповідь як

$$\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}, \\ y=-C_1e^{-t}+2C_2e^{5t} \end{cases}$$

можливо такий запис більш звичний. Наведений приклад випадку коли корені характеристичного рівняння різні.

Наступний випадок який може мати місце це наявність кратних коренів.

Приклад. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y \end{cases}$$

Рішення. Шукаємо рішення $x=b_1e^{kt}, y=b_2e^{kt}$. Підставимо

$$\begin{cases} b_1k = b_1 - b_2 \\ b_2k = b_1 + 3b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(k-1) + b_2 = 0 \\ -b_1 + b_2(k-3) = 0 \end{cases}$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ -1 & k-3 \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваємо визначник та отримаємо $k^2 - 4k + 4 = 0, k_{1,2} = 2$. Корені кратні, тому шикаємо рішення у виді

$$\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t} \\ y = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{2t} \end{cases}.$$

Підставляємо в

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

Отримаємо $2\alpha_1 + 2\beta_1 t + \beta_1 \equiv \alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t$. Як відомо два многочлени тотожно дорівнюють тільки тоді, коли співпадають коефіцієнти при однакових степенях t.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1 \\ \beta_2 = -\beta_1 \end{cases}$, тоді $\begin{cases} x = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{2t} \\ y = (-\alpha_1 - \beta_1 - \beta_1 t)e^{2t} \end{cases}$.

Або $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{2t} \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t} \end{cases}$.

Приклад. Вирішити систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Рішення. Шукаємо рішення $x = b_1 e^{kt}, y = b_2 e^{kt}$. Підставимо

$$\begin{cases} b_1(1-k) - 5b_2 = 0 \\ 2b_1 - b_2(1+k) = 0 \end{cases}$$

та отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0, k^2 + 9 = 0, k_{1,2} = \pm 3i$$

Беремо $k_1 = 3i$ і підставляємо в $b_1(1-k) - 5b_2 = 0$ отримаємо $b_1(1-3i) - 5b_2 = 0$, рішення цього рівняння $b_1 = 5$, $b_2 = (1-3i)$. За пишемо $x = 5e^{3it}, x = 5\cos 3t + i5\sin 3t$, $y = (1-3i)e^{3it} = \cos 3t + 3\sin 3t + i(\sin 3t - 3\cos 3t)$. Як відомо, окремо дійна та ,окремо, комплексна частини є рішеннями, тому загальне рішення має вид:

$$\begin{cases} x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t \\ y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{cases}$$

Аналогічно вирішуються системи з більшою кількістю невідомих.

Задачі для вирішення розділ 3.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}, x(0) = 0, y(0) = 1$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$ (Порада: перейти до рівняння другого порядку відносно змінної х)

Розділ 4. Теорія стійкості

При вивченні природних явищ створюють моделі. І виникає питання, на скільки знайдені рішення стійкі відносно зміни початкових умов.

Розглянемо якесь явище, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, ..., n) \quad (4.1.)$$

Будемо вважати, що t змінюється на відрізку $t_0 \le t \le T$ та T приймає достатньо великі значення, тоді рішення $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, ..., n)$ називається стійким за Ляпуновим, як що для любого $\varepsilon > 0$ можливо підібрати таке $\delta(\varepsilon)$, що для любого всякого рішення $y_i(t)\,(i = 1, 2, ..., n)$ тієї ж системи, початкові умови якої задовольняють нерівностям

$$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), (i = 1, 2, ..., n)$$

що для усіх $t > t_0$ виконується нерівності

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon,\ (i = 1, 2, ..., n) \quad (4.2)$$

то б то близькі за початковими умовами рішення залишаються близькими для усіх $t > t_0$.

Як що хоча б для одного рішення $y_i(t)\,(i = 1, 2, ..., n)$ умова (4.2) не виконується, то рішення $\varphi_i(t)$ є нестійким.

Як що $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, ..., n)$ задовольняє умовам стійкості та ще задовольняє умові

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (4.3),$$

як що $|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta_1, \delta_1 > 0$, то рішення $\varphi_i(t)\,(i = 1, 2, ..., n)$ називається асимптотично стійким.

Слід відзначити, що асимптотична стійкість не призводить до звичайної стійкості.

Приклад. Дослідити на стійкість рішення рівняння $\frac{dy}{dt}=-a^2y, a\neq 0$ з початковими умовами $y(t_0)=y_0$.

Рішення $y=y_0e^{-a^2(t-t_0)}$ асимптотично стійке

$$\left|y_0e^{-a^2(t-t_0)}-\overline{y}_0e^{-a^2(t-t_0)}\right|=e^{-a^2(t-t_0)}\left|y_0-\overline{y}_0\right|<\varepsilon$$

при $t\geq t_0$, як що $\left|y_0-\overline{y}_0\right|<e^{-a^2t_0}\varepsilon$ маємо

$$\lim_{t\to\infty}e^{-a^2(t-t_0)}\left|y_0-\overline{y}_0\right|=0$$

Приклад. Дослідити на стійкість рішення рівняння $\frac{dy}{dt}=a^2y, a\neq 0$ з початковими умовами $y(t_0)=y_0$. Рішення $y=y_0e^{a^2(t-t_0)}$ є асимптотично не стійким.

Стійкість точок спокою

Розглянемо динаміку одновимірної системи без тертя, то б то консервативну систему.

Поведінка цієї системи описується другим законом Ньютона. Будемо вважати, що маса тіла дорівнює одиниці і рівняння буде мати вид

$$\ddot{x}+f(x)=0$$

Введемо нову змінну та напишемо диференціальне рівняння як систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-f(x)\end{cases} \quad (4.4)$$

Як відомо простір нових змінних x,v є фазовий простір, а траєкторія руху в цьому просторі – є фазовою траєкторією.

Для дослідження стаціонарних точок, то б то точок де $\begin{cases}\dot{x}=0\\ \dot{v}=0\end{cases}$, більш зручно розглядати загальну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \quad (4.5)$$

Будемо вважати, що система має рішення (x_0, y_0) , що не залежать від часу та є рішеннями системи

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Кожна пара точок (x_0, y_0) є особливими точками, бо це нерухомі точки.

Для дослідження стійкості (x_0, y_0) розглянемо поведінку системи поблизу цих точок, то б то будемо шукати рішення близькі до (x_0, y_0)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \tilde{x}(t) \\ y(t) = y_0 + \tilde{y}(t) \end{cases}$$

де $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ не велике відхилення від (x_0, y_0). Розкладаємо праву частину (4.5) в ряд до першого додатку, тоді система (4.5) перетворюється на наступну

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = f_x(x_0, y_0)\tilde{x} + f_y(x_0, y_0)\tilde{y} \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = g_x(x_0, y_0)\tilde{x} + g_y(x_0, y_0)\tilde{y} \end{cases}$$

або в матричному виді

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Матриця, що побудована з похідних $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ − є матриця Якобі. Система (4.7) є система лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Як завжди шукаємо рішення у виді $\tilde{x}, \tilde{y} \sim e^{\lambda t}$ і тоді задача зводиться до задачі з матричного обчислення на власні вектори та власні значення матриці $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ яку запишемо як $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

Тоді маємо

$$\lambda\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь. Як що скласти характеристичне рівняння, то воно буде мати вид

$$\lambda^2 - S\lambda + J = 0 \quad (4.8)$$

де S − шпур матриці (слід), який дорівнюю сумі власних значень матриці

$$S = f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0),$$

J − визначник матриці $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

$$J = \det\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$J = f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)$$

Рішеннями рівняння (4.8) $\lambda_1 = \frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - J}, \lambda_2 = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - J}$.

Припустимо спочатку, що число під знаком квадратного кореня позитивне $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - J > 0$. Тоді обидва власних числа дійсні і різні. Загальне рішення диференціального рівняння (4.7), що описує еволюцію в часі малих збурень особливої точки, записується у вигляді лінійної комбінації двох членів, пропорційних, відповідно, $e^{\lambda_1 t}$ і $e^{\lambda_2 t}$. Якщо обидва власних числа негативні, то обурення з плином часу загасає і прагне до нуля, тобто система наближається до особливої (x_0, y_0)точки. Це стійка особлива точка. Якщо хоча б одне власне значення більше нуля, то відповідна складова обурення буде наростати, тобто система буде йти від особливої (x_0, y_0) точки. Отже, це нестійка особлива точка.

Нехай тепер $\left(\frac{S}{2}\right)^2 - J < 0$. Тоді обидва власних числа комплексні і комплексного сполученні , $\lambda_{1,2} = \frac{S}{2} \pm i\sqrt{J - \left(\frac{S}{2}\right)^2}$. Залежність збурень від часу в цьому випадку визначається виразом вигляду, де $e^{\lambda' t} cos(\lambda'' t + \varphi)$ λ'− дійсна, а λ'' − уявна частина власного числа. Особлива точка стійка, якщо дійсна частина $\lambda' < 0$, і нестійка, якщо $\lambda' > 0$.

В загалі наведемо класифікацію особливих точок, засновану на властивостях коренів характеристичного рівняння:

Умови на власні числа	*Тип особой точки*
Дійсні, λ_1>0, λ_2>0.	Не стійкий вузол
Дійсні, λ_1>0, λ_2<0.	Сідло
Дійсні, λ_1<0, λ_2<0.	Стійкий вузол
Чисто уявні, λ_1=iω, λ_2=−iω	Центр (в консервативних системах)

Комплексно сполученні, Re λ>0	Не стійкий фокус
Комплексно сполученні, Re λ<0	Стійкий фокус

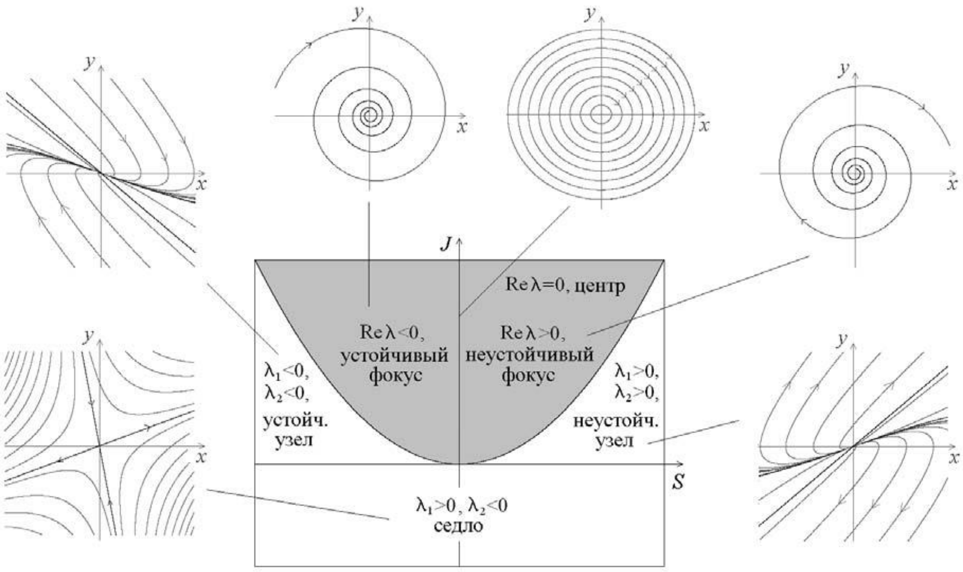


Рис. 15 У центрі рисунку діаграма на площині параметрів слід S − детермінант матриці Якобі J, на якій показані області, які відповідають різним типам особливих точок. Сірим кольором позначено область, в якій коріння характеристичного рівняння є комплексними. По периферії малюнка показаний якісно вид фазових портретів в околиці особливих точок.

Приклад. Дослідити особливі точки системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Рішення. Матриця має вид $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $S = 4$, $J = 5$, характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{5-4} = 2 \pm i$, особлива точка (0,0) є не стійким фокусом.

Приклад. Дослідити особливі точки рівняння коливань тіла масою m підвішеного на невагомому стрижні довжиною l

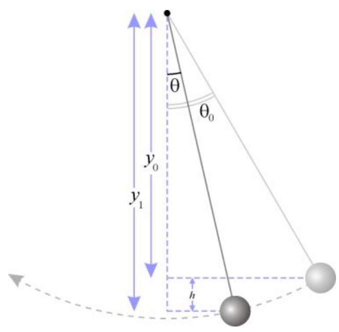


Рис. 16 Маятник

Рівняння це закон обертового руху тіла відносно точки підвісу

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=L_z$$

де I − момент інерції, $I=ml^2$, L −момент сили тяжіння, $L_z=-mgl\sin\theta$, тоді маємо наступне рівняння $ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta, \frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ (g − прискорення вільного падіння). Перейдемо до системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases}\frac{d\theta}{dt}=\omega\\ \frac{d\omega}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\theta\end{cases} \quad (4.8)$$

Знайдемо особливі точки для цього вирішимо систему

$$\begin{cases}\omega=0\\ \sin\theta=0\end{cases}$$

$\theta_1=0,\theta_2=\pi$. Особливі точки (0,0) та (π,0).

Розглянемо першу точку (0,0). Вводимо нові змінні $\theta=0+\tilde{\theta},\omega=0+\tilde{\omega}$. Розкладаємо $\sin\theta$ в ряд до лінійних $\tilde{\theta}$ в ряд Тейлора $(f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$. $\sin\theta\approx\tilde{\theta}$, тоді система (4.8) перетворюється на наступну

$$\begin{cases}\frac{d\tilde{\theta}}{dt}=\tilde{\omega}\\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt}=-\frac{g}{l}\tilde{\theta}\end{cases}$$

Матриця Якобі має вид $\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\frac{g}{l} & 0\end{vmatrix}$, $S=0$, $J=\frac{g}{l}$, $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$, то б то особиста точка (0,0) – центр, це стійка точка.

Розглянемо другу особисту точку (π,0). Вводимо нові змінні $\theta=\pi+\tilde{\theta},\omega=0+\tilde{\omega}$. Розкладаємо $\sin\theta$ в ряд до лінійних $\tilde{\theta}$. $\sin\theta\approx-\tilde{\theta},$ тоді система (4.8) перетворюється на наступну

$$\begin{cases}\frac{d\tilde{\theta}}{dt}=\tilde{\omega}\\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt}=\frac{g}{l}\tilde{\theta}\end{cases}$$

Матриця Якобі має вид $\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{g}{l} & 0\end{vmatrix}$, $S=0$, $J=-\frac{g}{l}$, $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{g}{l}}, \lambda_1=-\sqrt{\frac{g}{l}}, \lambda_2=\sqrt{\frac{g}{l}}$, то б то особиста точка (π,0)– сідло, це не стійка точка. Як що поставити маятник так, що $\theta=\pi$, то малі флуктуації будуть наростати за законом $e^{\frac{g}{l}t}$. що призведе до руйнування такого стану спокою.

Другий метод Ляпунова

Загальний метод дослідження стійкості рішень системи диференціальних рівнянь $\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), (i = 1, 2, ..., n)$

Теорема Ляпунова. Як що існує диференцьованна функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, що має назву функції Ляпунова, яка задовольняє наступним умовам:

1) $v(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$, причому $v = 0$ лише при $x_i = 0, (i = 1, 2, ..., n)$, то бо то функція має строгий мінімум в початку координат;
2) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$ при $t \geq t_0$, то точка покою $x_i = 0, (i = 1, 2, ..., n)$ є стійка точка рішень системи диференціальних рівнянь.

Похідна береться вздовж фазової траєкторії $x_i(t), (i = 1, 2, .., n)$.

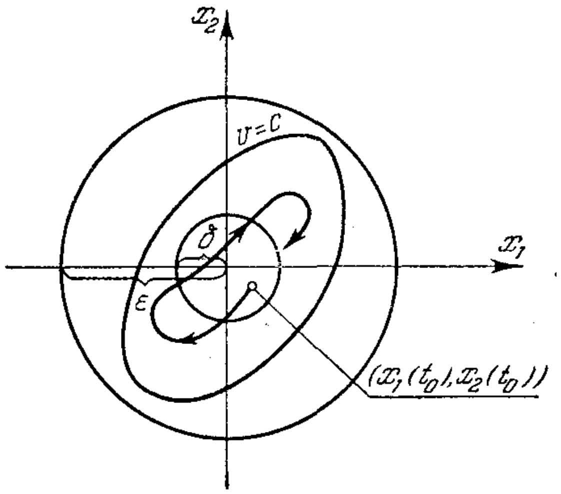


Рис. 18 Пояснення до теореми Ляпунова.

Приклад. Дослідити на стійкість тривіальне рішення системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3 \end{cases}$$

Функція $v(x, y) = x^2 + y^2$ задовільняє умовам теореми Ляпунова:

1) $v(x, y) \geq 0,\ v(0,0) = 0$;
2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -(x^4 + y^4) \leq 0$.

Тривіальне рішення є стійким.

Теорема Четаєва про не стійкість.

Як що існує диференцьованна функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задовольняє в деякій замкнутій h−області біля початку координат наступним умовам:

1) в малій околиці U навколо початку координат існує область ($v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$), причому $v = 0$ на лежачій в U частині границі області ($v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$);
2) в області $(v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0)$ похідна $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, причому в області $v(x_1, x_2, ..., x_n) \ge \alpha, \alpha > 0$, похідна $\frac{dv}{dt} > \beta, \beta > 0$, то точка спокою $x_i = 0, (i = 1, 2, ..., n)$ системи є не стійка.

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою $x \equiv 0, y \equiv 0$ системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^3 + x^5 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5 \end{cases}$$

Функція $v(x, y) = x^4 - y^4$ задовольняє умовам теореми Четаєва:
1) $v > 0,$ при $|x| > |y|$;
2) $\frac{dv}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8) > 0$ при $|x| > |y|$, причому $v \ge \alpha, \alpha > 0$, $\frac{dv}{dt} \ge \beta > 0$, звідси робимо висновок, що точка спокою $x \equiv 0, y \equiv 0$ не стійка.

Теореми Ляпунова та Четаєва використовують тоді, коли похідні $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$ в точках спокою дорівнюють нулю.

Теорема Гурвиця.
При класифікації особливих точок систем з лінійною правою частиною стійкими було рішення виду $e^{\lambda_i t}$ з $\lambda_i < 0$. Існує теорема яка формулює умови належності від'ємних коренів характеристичного рівняння.
Теорема Гурвиця. Необхідною та достатньою умовою від'ємності дійсних частин коренів многочленів

$$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$$

з дійсними коефіцієнтами є позитивність усіх діагональних мінорів матриці Гурвиця.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

На головній діагоналі стоять коефіцієнти від a_1 до a_n, стовпчики будуються з непарних та парних коефіцієнтів включно з коефіцієнтом a_0 всі елемента яких не вистачає замінюються нулями.
Головні діагональні мінори

$$\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$ і так далі.

Приклад.

Умови від'ємності коефіцієнтів характеристичного рівняння $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$

$$\Delta_1 = |a_1|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

то б то $a_1 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$, $(a_1 a_2 - a_3) a_3 > 0,$ або $a_3 > 0$.

Випадок малого коефіцієнта при похідних вищого порядку

Рішення диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \mu)$ безперервно залежать від параметру μ, як що функція $f(t, x(t), \mu)$ задовольняє умовам Липшиця по x:

$$|f(t, \bar{x}, \mu) - f(t, x, \mu)| < N |\bar{x} - x|$$

де N не залежить від t, x, μ.

Часто виникають ситуації коли малій параметр μ стоїть біля похідної вищого порядку, в цьому випадку рівняння має вид

$$\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Як що переписати це рівняння як $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x)$, при $\mu = 0$ маємо безкінечний розрив, тому з'ясуємо чи можливо відкинути член $\mu \frac{dx}{dt}$ в цьому рівнянні.

Як що це зробити, то отримаємо вироджене рівняння $f(t, x) = 0$, воно має назву виродженого рівняння, а його рішення $x = x(t)$.

Розглянемо для визначеності випадок $\mu > 0$, коли μ прямує до нуля похідна $\frac{dx}{dt}$ в рівнянні $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu} f(t, x)$ прямує до безкінечності в точках де $f(t, x) \neq 0$ та має знак, що співпадає зі знаком $f(t, x)$. Дотичні до інтегральних кривих будуть йти паралельно вісі OX. Як що $f(t, x) > 0$, то рішення $x(t, \mu)$

зростає з ростом t, так як $\frac{dx}{dt} > 0$, а як що $f(t,x) < 0$, $\frac{dx}{dt} < 0$. В залежності від того як змінюється знак (напрям похідної) вироджена крива $x = x(t)$ буде стійкої або не стійкою. Як що при проходженні $x = x(t)$ знак змінюється з «+» на «–» вироджена крива стійка, при зміні з «–» на «+» − не стійка, при відсутності зміни знаку – напівстійка (хоча швидше за все це не стійка ситуація).

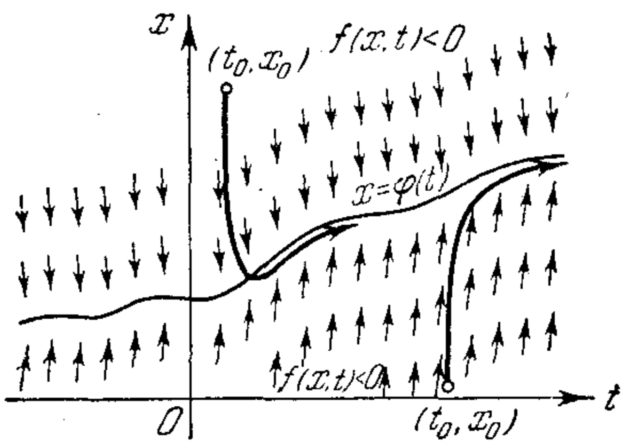


Рис. 19 Вироджена крива стійка.

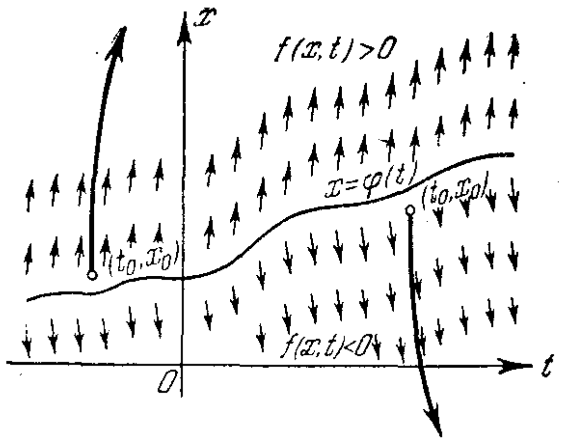


Рис. 20 Вироджена крива не стійка.

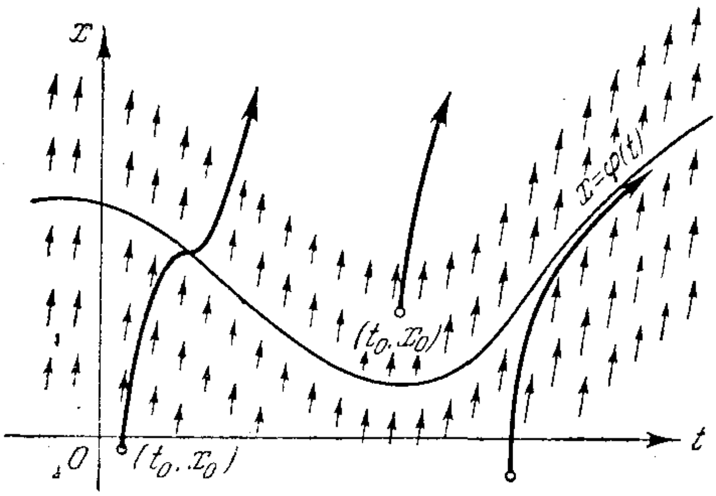


Рис. 21 Вироджена крива напівстійка.

Слід додати, що коли на графіку виродженого рішення $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, то вироджена крива $x = x(t)$ стійка, бо $f(t, x)$ зменшується з зростанням x (знак змінюється з «+» на «–»), як що $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, то рішення $x = x(t)$ не стійке, бо функція $f(t, x)$ з зростанням x (знак змінюється з «–» на «+»).

Як що вироджених кривих декілька, то можливо дослідити стійкість кожної.

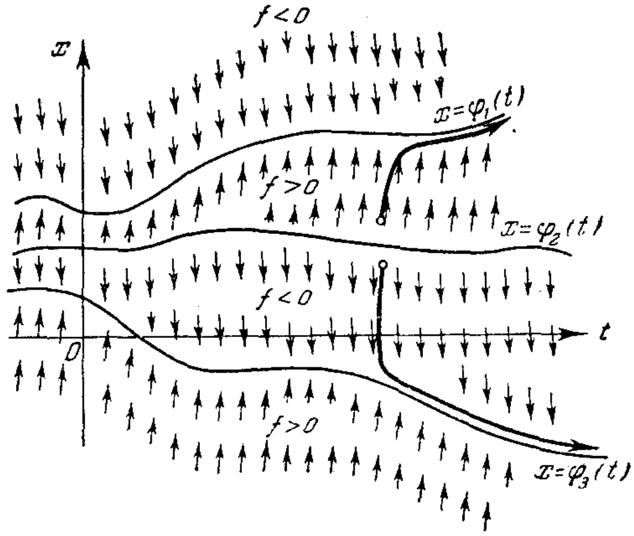


Рис. 22 Ситуація з декількома виродженими кривими.

Приклад.

Дослідити стійкість виродженого рішення диференціального рівняння

$$\mu \frac{dx}{dt} = x(t^2 - x + 1), \mu > 0, x(t_0) = x_0$$

Виродженими є рішення $x=0$ та $x=t^2+1$. Знайдемо знак похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$ на вироджених кривих, $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=0}=t^2+1>0$, отже $x=0$ не стійке рішення, коли $x=t^2+1$ $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=t^2+1}=-\left(t^2+1\right)<0$, то б то $x=t^2+1$ − стійке рішення.

Як що початкова точка (t_0,x_0) лежить у верхній на півплощині $x_0>0$, то інтегральна крива наближується до стійкого рішення $x=t^2+1$, а як що у ніжній, де $x_0<0$, то
$\lim\limits_{\mu\to 0} x(t,\mu)=-\infty, t>t_0$

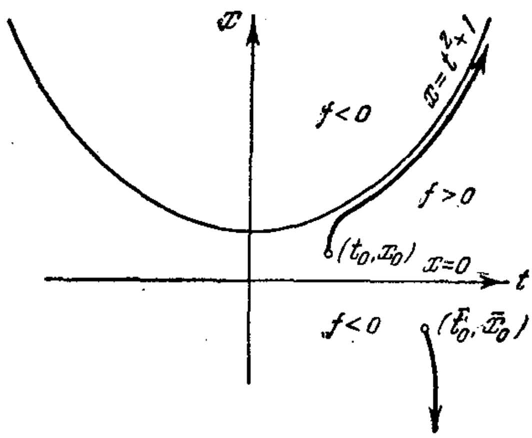


Рис. 23 Поведінка рішень диференціального рівняння $\mu\frac{dx}{dt}=x(t^2-x+1)$.

Стійкість при постійно діючих збуреннях

Як що система рівнянь $\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n), x_i(t_0)=x_{i,0},(i=1,.2,..,n)$ підпадає під дію короткочасного збудження то це еквівалентно зміні початкових умов і дослідження стійкості можливо виконати за теоремою Ляпунова. Але коли збудження діє не короткочасно, то це вже не підпадає під умову теореми Ляпунова і виникає потреба в додаткових дослідженнях. В цьому випадку користуються теоремою Малкіна.

По перше, за допомогою введення нової змінної переведемо точку, яку досліджуємо на стійкість в початок координат $y_i=x_i+\varphi_i(t)$, де $\varphi_i(t)$ − рішення, що досліджується на стійкість, x_i − нова змінна. Тому далі мова йде про дослідженння на стійкість тривіального рішення.

Теорема Малкіна.

Як що для системи $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, *існує диференцюєма функція Ляпунова*

$v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняя в початковій точці координат при $t \geq t_0$ наступним умовам:

1) $v(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geq w_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $v(t, 0, 0, ..., 0) = 0$, де $w_1(x_1, x_2, ..., x_n)-$ безперервна функція своїх координат та дорівнює нули лише у початку координат;
2) похідні $\frac{\partial v}{dx_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ обмежені з модулем;
3) похідна $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1} \frac{\partial v}{dx_i} f_i \leq -w_2(x_1, x_2, .., x_n) \leq 0$, де $w_2(x_1, x_2, .., x_n)$ – безперервна функція яка може довівнювати нулю лиша у початку координат, то тривіальне рішення стійке відносно постійно діючих збуджень.

Приклад. З'ясувати чи стійким відносно постійного збудження тривіальне рішення $x = 0, y = 0$ системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a^2 y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -b^2 x - y^3 \end{cases}$$

де a, b – постійні.

Рішення. Функція Ляпунова, що задовольняє умовам теореми Малкіна має вид $v = b^2 x^2 + a^2 y^2$.

$v(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y^2 = w_1(x, y)$,

$$\frac{dv}{dt} = 2b^2 x\left(a^2 y - x^3\right) + 2a^2 y\left(-b^2 x - y^3\right) = -2\left(b^2 x^4 + a^2 y^4\right), w_2(x, y) = 2\left(b^2 x^4 + a^2 y^4\right)$$

Як бачимо, виконані всі умови теореми Малкіна, тому тривіальне рішення $x = 0, y = 0$ стійке.

Завдання для вирішення розділ 4.

1. Якого типу є точка спокою $x = 0, y = 0$ системи рівнянь $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$

Література

1. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк − 2-е вид. перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. Бугрій О. М. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі : Навчальний посібник / Н. П. Процах, Н. В. Бугрій – Львів, 2011.
3. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння: навчальний посібник/ П. І. Каленюк − Міністерство освіти і науки України, Національний університет "Львівська політехніка". Львів, 2014.
4. Кривошея С. А Диференціальні та інтегральні рівняння : підручник / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк., В. М. Бурим – К.: Либідь, − 2004.
5. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/ Л. Э. Эльсгольц. Наука. М., 1969. 424 с.