УДК 512.548.7

І.В. Фриз
Хмельницький національний університет, Хмельницький

ПРО ПОБУДОВУ n-АРНИХ КВАЗІГРУП

В статті описано залежність між повними підстановками ізотопних квазігруп та уточнено критерій існування ортогональної пари, знайдено необхідні і достатні умови, коли різні кручення бінарної квазігрупи є ортогональними. Тут зроблено перші кроки для розв'язування проблеми побудови n-арних квазігруп, які розкладаються в композицію двох квазігруп. Для цього запропоновані алгоритми побудови квазігруп із допустимими бінарними ретрактами, знайдено метод побудови пари перпендикулярних квазігруп однакової арності.

Ключові слова: повна підстановка, неперехресні підстановки, майже неперехресні підстановки, ізотоп квазігрупи, ортогональність бінарних квазігруп, n-арна квазігрупа, перпендикулярність квазігруп.

Вступ. У зв'язку із застосуванням, останнім часом помітно зріс інтерес до вивчення багатомісних квазігруп, тому нагальною є потреба їх побудови. Одним із методів є побудова за допомогою безповторної композиції, оскільки безповторна композиція n-арної та k-арної квазігруп є $(n+k-1)$-арною квазігрупою. Цей метод дозволяє будувати квазігрупи довільної арності, проте не всі квазігрупи є роздільними, тобто такими, які можна побудувати за допомогою безповторної композиції [9]. Серед інших методів побудови багатомісних квазігруп відомі:

- В.І. Оной [4], за допомогою асоціативно-комутативного кільця із одиницею, побудував тернарну лупу із властивістю оборотності, яка є нероздільною згідно наслідку 2 теореми 1 [5];
- Д.С. Кротов [8], використовуючи часткові булеві функції, побудував нероздільні багатомісні квазігрупи порядку $4r$ такі, що всі їхні ретракти отримані фіксуванням однієї змінної є роздільними;
- Д.С. Кротов, В.Н. Потапов [10], за допомогою G-луп, побудували тополінійні латинські гіперкуби порядку $n \geq 4$ та за допомогою квадратичних функцій гіперкуби із тією ж властивістю для порядків подільних на квадрат.

М.М. Глухов [3] встановив, що будь-яку скінченну n-арну квазігрупу порядку $k \geq 7$ можна подати у вигляді композиції (з повторенням змінних) бінарних квазігруп, які ізотопні деякій квазігрупі. Проте, повторна композиція двох квазігруп не завжди є квазігрупою. Наприклад, В.Д. Білоусов [1] довів, що ліве (праве) множення двох квазігруп є квазігрупою тоді і тільки тоді, коли одна із квазігруп ортогональна до лівого (правого) ділення іншої (теорема 1). Критерій оборотності композиції двох квазігруп довільної арності описаний Ф.М.Сохацьким та автором [12]. Для цього введено поняття перпендикулярності операцій, яке узагальнює поняття ортогональності бінарних операцій. Знайдений критерій показує, що побудова n-арних квазігруп із зазначеною властивістю зводиться до побудови пари перпендикулярних квазігруп, які в свою чергу визначаються через ортогональні бінарні квазігрупи. Отже, проблема побудови n-арних квазігруп зводиться до вивчення певних питань теорії ортогональних бінарних квазігруп. *Метою статті* є дослідження бінарних ортогональних квазігруп в контексті побудови перпендикулярних квазігруп та квазігруп, які мають перпендикулярну пару.

Автором уточнено описані раніше у [7] залежність між повними підстановками ізотопних квазігруп (лема 3) та критерій існування ортогональної пари до квазігрупи (лема 5). Більш детально ознайомитися із поняттями повних підстановок квазігруп та груп можна у книзі Е.Д. Кідвела та Дж. Денеша [7] та статтях Л.Дж. Пейджа [11], Г.Б. Білявської та А.Ф. Руссу [2], Е.Б. Еванса [6] та ін.

В даній статті знайдено необхідні і достатні умови, коли два різні кручення бінарної квазігрупи є ортогональними (лема 7, теорема 8). Тут зроблено перші кроки для розв'язування проблеми побудови n-арних квазігруп, які розкладаються в композицію двох квазігруп. Для цього запропоновано алгоритми побудови квазігруп із допустимими бінарними ретрактами (теорема 12), знайдено один із методів побудови пари багатомісних квазігруп однакової арності, які мають властивість перпендикулярності (наслідок 14).

1. Допоміжні означення та результати. Нехай Q позначає довільну множину. Враховуючи потреби застосування, у статті всі факти розглядаються для квазігруп, які визначені на скінченній множині, хоча більшість цих тверджень істинні і для нескінченних множин.

1.1. Бінарні квазігрупи. Операція f, яка визначена на множині Q, називається

- *лівооборотною*, якщо для довільних b, c існує єдиний елемент x такий, що $f(x,b)=c$;
- *правооборотною*, якщо для довільних a, c існує єдиний елемент y такий, що $f(a,y)=c$
- *оборотною* або *квазігруповою*, якщо вона є ліво оборотною та право оборотною одночасно. При цьому, групоїд (Q,f) називається *бінарною квазігрупою*.

Лівим та правим діленнями квазігрупи f називаються операції ${}^l f$ та ${}^r f$ на тій самій множині, якщо вони визначаються співвідношеннями

$$ {}^l f(z,y)=x :\Leftrightarrow f(x,y)=z, \qquad {}^r f(x,z)=y :\Leftrightarrow f(x,y)=z $$

відповідно.

R_a^f позначає правий зсув операції f за елементом a, L_b^f – лівий зсув операції f за елементом b, M_a^f – середній зсув за елементом a, тобто

$$ R_a^f x := f(x,a), \qquad L_b^f x := f(b,y), \qquad M_a^f x := {}^r f(x,a). $$

Отже, оборотність зліва (справа) операції f означає, що R_a^f (L_b^f) є підстановкою множини Q. Бінарна операція g називається *ізотопом* бінарної операції f, якщо існують підстановки α, β, γ множини Q такі, що виконується рівність

$$ g(x,y)=\gamma^{-1} f(\alpha x, \beta y), $$

трійка (α,β,γ) називається *ізотопізмом*. Зокрема, якщо $\alpha=\gamma=\iota$, то операція g називається *правим крученням* операції f, якщо $\beta=\gamma=\iota$ – лівим крученням операції f, якщо $\alpha=\beta=\iota$ – середнім крученням операції f.

Операції g і h, які визначені на множині Q, називаються *ортогональними* і позначається, якщо для всіх $a,b\in Q$ система

$$ \begin{cases} g(x,y)=a, \\ h(x,y)=b \end{cases} $$

має єдиний розв'язок.

В.Д. Білоусов [1] описав умови коли повторна композиція двох бінарних квазігруп є оборотною. Наведемо інше формулювання його результату.

Теорема 1. *Нехай* g, h *– довільні бінарні квазігрупи. Тоді*

$$ g \underset{r}{\oplus} h \ \textit{– оборотна} \Leftrightarrow g \perp {}^r h, \qquad g \underset{\ell}{\oplus} h \ \textit{– оборотна} \Leftrightarrow g \perp {}^\ell h, $$

де $(g \underset{r}{\oplus} h)(x,y) := g(x,h(x,y))$, $(g \underset{\ell}{\oplus} h)(x,y) := g(h(x,y),y)$.

Дві підстановки α і β множини Q будемо називати

- *майже неперехресними*, якщо існує точно один елемент $a\in Q$ для якого виконується умова $\alpha a=\beta a$;
- *неперехресними*, якщо для всіх $a\in Q$ виконується нерівність $\alpha a\neq\beta a$.

Вважатимемо, що підстановка α має одну нерухому точку, якщо вона майже неперехресна із тотожньою підстановкою ι, тобто існує точно один елемент $a\in Q$ для якого виконується рівність $\alpha a = a$.

Підстановка ϕ множини Q називається *повною* для квазігрупи h, якщо відображення ϕ', яке визначається рівністю

$$ \phi' x := h(x,\phi x), $$

також є підстановкою множини Q.

Бінарна квазігрупа порядку m називається

- *допустимою*, якщо вона має принаймні одну повну підстановку;
- *цілком допустимою*, якщо вона має m повних неперехресних підстановок.

Відомо, що квазігрупа має ортогональну пару тоді і тільки тоді, коли вона допустима та має ортогональну квазігрупову пару і коли вона цілком допустима [7].

1.2. Латинські квадрати. Квадрат заповнений елементами множини Q називається *латинським*, якщо кожен рядок та кожен стовпець цього квадрату є перестановкою множини Q. Елемент, який міститься в комірці називатимемо вхідником комірки. Кожній операції на множині Q відповідає квадрат, а квазігрупі – латинський квадрат, який є внутрішньою частиною її таблиці Келі. Ортогональним операціям відповідають ортогональні квадрати, тобто квадрати при накладанні яких всі утворені пари є різними.

Діагоналлю латинського квадрата називається сукупність комірок $(x,\phi x)$ взятих по одному із кожного рядка і кожного стовпця та містять елементи $f(x,\phi x)$, де ϕ – деяка підстановка множини Q. *Трансверсаллю* латинського квадрата називається діагональ, всі елементи якої різні, тобто ϕ є повною для f. Відомо, що кожній повній підстановці квазігрупи відповідає трансверсаль відповідного латинського квадрату. Таким чином, квазігрупа порядку m є цілком допустимою, якщо відповідний латинський квадрат має m неперехресних трансверсалей.

Л.Дж. Пейдж [11] запропонував метод побудови квазігрупи, яка ортогональна даній, використовуючи її повні підстановки. Сформулюємо теорему, яка є підґрунтям даного методу, в системі наведених нами означень.

Теорема 2. [11] *Нехай f – цілком допустима квазігрупа, яка визначена на множині Q порядку m та ϕ_1, ϕ_2, $\ldots$, ϕ_m – відповідний набір повних попарно неперехресних підстановок. Тоді латинський квадрат, отриманий розміщенням a_j в комірки $(k,\phi_j(k))$ для всіх $j \in \overline{1,m} := \{1,\ldots,m\}$ та всіх $k \in Q$, ортогональний до латинського квадрату, який відповідає квазігрупі f. Цим способом можна побудувати всі квазігрупи ортогональні даній.*

1.3. Багатомісні квазігрупи. Операція f, яка визначена на множині Q, називається i-*оборотною*, якщо для довільних елементів $a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n$ із Q існує єдиний елемент $x \in Q$ такий, що

$$f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n)=b.$$

Якщо f є i-оборотною для всіх $i \in \overline{1,n}$, тоді вона називається *оборотною* або *квазігруповою*. При цьому, групоїд (Q,f) називається n-*арною квазігрупою*.

Бінарна операція $f_{(\{m,p\},\bar{a})}$, яка визначається рівністю

$$f_{(\{m,p\},\bar{a})}(x_m,x_p)=f(a_1,\ldots,a_{m-1},x_m,a_{m+1},\ldots,a_{p-1},x_p,a_{p+1},\ldots,a_n),$$

називається *бінарним* $\{m,p\}$*-ретрактом* n-арної операції f за вибіркою $\bar{a}$, де

$$\bar{a}=(a_1,\ldots,a_{m-1},a_{m+1},\ldots,a_{p-1},a_{p+1},\ldots,a_n).$$

Якщо $\bar{a}$ – довільна фіксована вибірка, то будемо використовувати позначення $f_{\{m,p\}}$.

У [12] знайдено критерій оборотності композиції двох квазігруп довільних арностей. З цією метою, введено поняття перпендикулярності операцій, яке є одним із узагальнень ортогональності бінарних операцій на багатомісний випадок. В даній статті, ми розглянемо лише випадок перпендикулярності, коли обидві операції мають однакову арність, тобто типу $(\imath,\imath;m)$.

Означення 1. *Дві бінарні операції називаються* відповідними $\{m,p\}$-ретрактами *операцій g і h, де $m \neq p$, якщо вони визначаються термами, що отримані із термів*

$$g(x_1,\ldots,x_n), \qquad h(x_1,\ldots,x_n)$$

шляхом заміни кожної змінної, окрім x_m і x_p, елементами із Q.

Означення 2. *n-арні операції g і h називаються* перпендикулярними типу, *якщо для всіх $p \in \overline{1,n} \setminus \{m\}$ кожна пара відповідних $\{m,p\}$-ретрактів є ортогональною.*

2. Повні підстановки квазігруп. Деякі результати цього розділу є уточненням відомих фактів, така необхідність викликана розділом 4.

Як відомо із [7, Теорема 1.4.4], допустимість є інваріантом ізотопії. Нижче наведемо уточнене формулювання цього факту.

Лемма 3. *Довільний* (α,β,γ)*-ізотоп допустимої квазігрупи із повною підстановкою* ϕ *є допустимою квазігрупою із повною підстановкою* $\beta^{-1}\phi\alpha$.

Доведення. Нехай f – допустима бінарна квазігрупа на Q, тобто існує повна підстановка ϕ така, що відображення ϕ', яке визначається рівністю

$$\phi' x = f(x,\phi x),$$

є підстановкою множини Q. Покладемо $x := \alpha u$, тоді

$$\gamma^{-1}\phi'(\alpha u) = \gamma^{-1} f(\alpha u, \beta\beta^{-1}\phi(\alpha u)),$$

тобто

$$\gamma^{-1}\phi'(\alpha u) = Tf(u, \beta^{-1}\phi(\alpha u)),$$

де $T := (\alpha,\beta,\gamma)$ – довільний ізотопізм. З означення випливає, що $\gamma^{-1}\phi'\alpha$ і $\beta^{-1}\phi\alpha$ є підстановками множини Q, тому $\beta^{-1}\phi\alpha$ є повною підстановкою для Tf, тобто fT – допустима. На мові латинських квадратів лема 3 означає, що трансверсалі з координатами $(x,\phi x)$ в (α,β,γ)-ізотопному латинському квадраті відповідає трансверсаль з координатами $(x,\beta^{-1}\phi\alpha x)$.

Твердження 4. *Всі однойменні трансляції квазігрупи попарно неперехресні.*

Доведення. Нехай f – квазігрупа. Якщо трансляції $R^f_{a_1}$ та $R^f_{a_2}$ перехресні, то це означає, що для деякого $b \in Q$ виконується рівність $R^f_{a_1}(b) = R^f_{a_2}(b)$, тобто

$$f(b,a_1) = f(b,a_2).$$

Позаяк f – квазігрупа, то $a_1 = a_2$. Отже, різні праві трансляції неперехресні.

Для лівих трансляцій доведення аналогічне. Якщо трансляції $M^f_{a_1}$ та $M^f_{a_2}$ перехресні, то це означає, що для деякого $b \in Q$ виконується рівність $M^f_{a_1}(b) = M^f_{a_2}(b)$, звідки

$${}^r f(b,a_1) = {}^r f(b,a_2).$$

Оскільки f – квазігрупа, то $a_1 = a_2$. Отже, різні середні трансляції неперехресні.
Наведемо уточнення критерію існування ортогональної пари для квазігрупи.

Теорема 5. *Квазігрупа* h *ортогональна до квазігрупи* f *тоді і тільки тоді, коли всі праві трансляції квазігрупи* ${}^r f$ *є повними підстановками для* h.

Доведення. Нехай $f \perp h$, тоді операція t, яка визначається рівністю

$$t(x,y) := h(x, {}^r f(x,y)),$$

є квазігрупою відповідно до теореми 1.

Рівняння $t(a,y) = b$ має єдиний розв'язок завжди, якщо h і f – квазігрупи. Рівняння $t(x,a) = b$ можна переписати у вигляді $R^t_a(x) = b$. Таким чином, воно однозначно розв'язне тоді і тільки тоді, коли R^t_a є підстановкою множини Q. З рівності

$$R^t_a(x) = h(x, R^{{}^r f}_a(x))$$

випливає, що R^t_a – підстановка множини Q тоді і тільки тоді, коли $R^{{}^r f}_a$ є повною підстановкою для h.

Наслідок 6. [7] *Квазігрупа має ортогональну квазігрупову пару тоді і тільки тоді, коли вона є цілком допустимою.*

3. Ортогональність ізотопів квазігрупи. Розглянемо найпростіші ізотопії, а саме, коли дві компоненти ізотопізму є тотожніми перетвореннями. Такі ізотопи називаються крученнями (ліві, праві і середні кручення в залежності від того, де знаходиться підстановка, яка не обов'язково тотожня). Очевидно, що середні кручення однієї і тієї ж квазігрупи не є ортогональними, що випливає із дослідження розв'язків відповідної системи рівнянь. Тут ми розглянемо умови, коли ліві кручення квазігрупи ортогональні. Аналогічні умови істинні і для правих кручень.

Лема 7. *Нехай* h *– бінарна цілком допустима квазігрупа на* Q *,* α *– нетотожна підстановка множини* Q *,* $T := (\alpha, \iota, \iota)$. *Квазігрупи* Th *і* h *ортогональні тоді і тільки тоді, коли* α *має одну нерухому точку.*

Доведення. Ортогональність квазігруп Th і h рівносильна для будь-яких $a, b \in Q$ однозначності розв'язку системи

$$\begin{cases} h(x, y) = a, \\ h(\alpha x, y) = b, \end{cases}$$

яка рівносильна однозначності розв'язку рівняння

$${}^{r}h(x, b) = {}^{r}h(\alpha x, a).$$

Оскільки h – квазігрупа, то це означає, що при $a \neq b$ виконується нерівність $\alpha x \neq x$, тобто α – нетотожна підстановка множини , а при $a = b$ – рівність $\alpha x = x$. Це означає, що існує єдиний елемент a_1 такий, що $\alpha a_1 = a_1$, тобто α має одну нерухому точку.

Теорема 8. *Нехай* h *– бінарна цілком допустима квазігрупа на* Q *,* α *і* β *– підстановки множини* Q *,* $\alpha \neq \beta$. *Квазігрупи* $T_1 h$ *,* $T_2 h$ *– ортогональні квазігрупи тоді і тільки тоді, коли і – майже неперехресні підстановки, де* $T_1 := (\alpha, \iota, \iota)$ *,* $T_2 := (\beta, \iota, \iota)$ *.*

Доведення. Ортогональність квазігруп $T_1 h$ і $T_2 h$ рівносильна ортогональності квазігруп h і $T_1^{-1} T_2 h$. Відповідно до леми 7, це означає, що перетворення $\alpha^{-1}\beta$ має одну нерухому точку на Q, тобто існує єдиний елемент $a \in Q$ такий, що $\alpha^{-1}\beta a = a$, звідки $\beta a = \alpha a$. Це означає, що α і β – майже неперехресні підстановки.

Це твердження дає метод побудови ортогональних бінарних квазігруп. Він є частковим випадком методу побудови ортогональних квазігруп, який описаний у теоремі 2. Справді, нехай маємо латинський квадрат L та його трансверсаль θ із координатами $(x, \phi x)$ для будь-якого $x \in Q$. Застосуємо перестановку рядків за підстановкою α, тоді для будь-якого $x \in Q$ комірки $(\alpha x, \phi \alpha x)$ – також утворюють трансверсаль, оскільки при перестановці рядків діагональ залишається та сама, лише переставляються місцями вхідники. Це означає, що набір комірок із координатами $(x, \phi \alpha x)$ утворює трансверсаль θ_1 квадрата LT, оскільки відповідно до леми 3, підстановка $\phi\alpha$ є повною для операції, яка відповідає квадрату LT, де $T = (\alpha, \iota, \iota)$.

Серед ортогональних квазігруп, які можна побудувати за теоремою 2, теорема 8 описує лише ізотопні. Цей метод зводиться до знаходження майже неперехресних підстановок і дає можливість будувати множини взаємноортогональних квазігруп, маючи набір попарно майже неперехресних підстановок.

Наслідок 9. *Нехай* h *– бінарна цілком допустима квазігрупа на* Q *,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *– попарно майже неперехресні підстановки множини* Q. *Тоді операції* $T_1 h, \ldots, T_k h$ *– попарно ортогональні квазігрупи, де* $T_i := (\alpha_i, \iota, \iota)$ *,* $i = 1, \ldots, k$ *.*

Приклад 1. Нехай маємо квазігрупу f на Z_7, яка визначається рівністю

$$f(x, y) := 4x + 6y,$$

та дві майже неперехресні підстановки α і β множини Z_7, які визначаються рівностями $\alpha x := 2x$, $\beta x := 3x$. Легко перевірити, що вони перетинаються лише в точці 0. Справді, $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$. Нехай існує елемент $a \in Z_7 \setminus \{0\}$ такий, що $2 \cdot a = 3 \cdot a$, звідси $2 = 3$. Отримана суперечність вказує, згідно наслідку 9, на ортогональність квазігруп g та h, які визначаються рівностями

$$g(x, y) := x + 6y, \qquad h(x, y) := 5x + 6y,$$

і є (α, ι, ι)- та (β, ι, ι)-ізотопами операції f. Ортогональність цих квазігруп можна перевірити іншим способом: оскільки Z_7 є полем, то визначник відповідної системи рівний 4, тобто взаємно простий із модулем, а тому система має єдиний розв'язок. До того ж, легко перевірити, що квазігрупи f, g, h є взаємноортогональними, оскільки ι, α, β – попарно майже неперехресні.

Приклад 2. Розглянемо таблицю Келі квазігрупи f на Z_7:

$T_1 f$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	6	5	4	3	2	1
1	4	3	2	1	0	6	5
2	1	0	6	5	4	3	2
3	5	4	3	2	1	0	6
4	2	1	0	6	5	4	3
5	6	5	4	3	2	1	0
6	3	2	1	0	6	5	4

Як зазначено у прикладі 1, підстановки α і β майже неперехресні. Запишемо таблиці Келі для $T_1 f$ та $T_2 f$ застосувавши до рядків перестановки α і β:

$T_1 f$	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha 0$	0	6	5	4	3	2	1
$\alpha 1$	4	3	2	1	0	6	5
$\alpha 2$	1	0	6	5	4	3	2
$\alpha 3$	5	4	3	2	1	0	6
$\alpha 4$	2	1	0	6	5	4	3
$\alpha 5$	6	5	4	3	2	1	0
$\alpha 6$	3	2	1	0	6	5	4

$T_2 f$	0	1	2	3	4	5	6
$\beta 0$	0	6	5	4	3	2	1
$\beta 1$	4	3	2	1	0	6	5
$\beta 2$	1	0	6	5	4	3	2
$\beta 3$	5	4	3	2	1	0	6
$\beta 4$	2	1	0	6	5	4	3
$\beta 5$	6	5	4	3	2	1	0
$\beta 6$	3	2	1	0	6	5	4

Переставивши рядки в таблицях Келі, відповідно до натурального порядку значень підстановок α і β, маємо відповідні для $T_1 f$ та $T_2 f$ латинські квадрати:

0	6	5	4	3	2	1
1	0	6	5	4	3	2
2	1	0	6	5	4	3
3	2	1	0	6	5	4
4	3	2	1	0	6	5
5	4	3	2	1	0	6
6	5	4	3	2	1	0

0	6	5	4	3	2	1
5	4	3	2	1	0	6
3	2	1	0	6	5	4
1	0	6	5	4	3	2
6	5	4	3	2	1	0
4	3	2	1	0	6	5
2	1	0	6	5	4	3

Таким чином, отримані нами латинські квадрати ортогональні, що легко перевірити їх накладанням.

4. Побудова квазігруп з допустимими бінарними ретрактами. Безповторна композиція квазігруп завжди є квазігрупою, але М.М. Глухов [3] показав, що довільну n-арну квазігрупу можна побудувати з бінарних, застосовуючи як безповторні, так і повторні композиції. Повторна композиція квазігруп не завжди є квазігрупою. Один із критеріїв знайдений Ф.М. Сохацьким та автором у роботі [12], відповідно до якого побудова квазігруп за допомогою безповторної суперпозиції зводиться до побудови пар перпендикулярних квазігруп, тому важливими є методи їх побудови. Визначальною вимогою перпендикулярності квазігруп є ортогональність певних їх бінарних ретрактів, тому на основі результатів попередніх розділів тут вивчаються методи побудови квазігруп, які мають перпендикулярну пару та пар перпендикулярних квазігруп.

Твердження 10. *n-арна квазігрупа має перпендикулярну операцію (квазігрупу) типу $(\iota,\iota;m)$ тоді і тільки тоді, коли всі $\{m,i\}$-ретракти є (цілком) допустимими, де $i \in \overline{1,n} \setminus \{m\}$.*

Доведення. За означенням 2, перпендикулярність визначається через ортогональність бінарних ретрактів. Оскільки для будь-якого $i \in \overline{1,n} \setminus \{m\}$ всі $\{m,i\}$-ретракти квазігрупи є квазігрупами, то за наслідком 6, до бінарних квазігруп існують ортогональні операції (квазігрупи) тоді і тільки тоді, коли вони є (цілком) допустимими. Звідси випливає істинність даного твердження.

Наслідок 11. *Існують квазігрупи, які не мають перпендикулярної пари. Інакше кажучи, існує квазігрупа, композиція якої із довільною іншою квазігрупою, ні за яких умов не є квазігрупою.*

Приклад 3. Довільні n-арні квазігрупи порядків 2 і 6 не мають перпендикулярної пари, тому що не існує цілком допустимих бінарних квазігруп цих порядків.

Наступна теорема дає можливість будувати n-арні квазігрупи, які мають до себе перпендикулярну операцію (квазігрупу).

Теорема 12. *Нехай f_1 – довільна бінарна квазігрупа, f_2 – довільна -арна квазігрупа. -Арна квазігрупа f, яка визначається рівністю*

$$f(x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_1, f_2(x_2, \ldots, x_n)),$$

для всіх $j \in \overline{2,n}$ має (цілком) допустимі $\{1, j\}$-ретракти, тобто має перпендикулярну (квазігрупову) пару типу $(\iota, \iota; 1)$, тоді і тільки тоді, коли f_1 – (цілком) допустима.

Доведення. Нехай $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in Q^n$. Для довільного $j \in \overline{2,n}$ розглянемо $\{1, j\}$-ретракт квазігрупи f визначений вибіркою $\overline{a}$:

$$\begin{aligned} f_{\{1,j\}}(x_1, x_j) &:= f(x_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) = \\ &= f_1(x_1, f_2(a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)) = f_1(x_1, \beta_j x_j), \end{aligned}$$

де $\beta_j x_j := f_2(a_2, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Відображення β_j є підстановкою множини Q, оскільки f_2 – квазігрупа. Отже, квазігрупи $f_{\{1,j\}}$ та f_1 ізотопні. Відповідно до леми 3, квазігрупа $f_{\{1,j\}}$ є (цілком) допустимою тоді і тільки тоді, коли квазігрупа f_1 є (цілком) допустимою. З довільності $j \in \overline{2,n}$ випливає, що квазігрупа f має (цілком) допустимі $\{1, j\}$-ретракти тоді і тільки тоді, коли f_1 є (цілком) допустимою.

Таким чином, для того щоб побудувати n-арну квазігрупу, яка має перпендикулярну (квазігрупову) пару, достатньо мати одну (цілком) допустиму бінарну квазігрупу та іншу довільну квазігрупу.

Наслідок 13. *Нехай $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – бінарні квазігрупи. n-Арна квазігрупа f, яка визначається рівністю*

$$f(x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_1, f_2(x_2, \ldots, f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) \ldots)),$$

для всіх $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$, має (цілком) допустимі $\{i, j\}$-ретракти, тобто для будь-якого $i \in \overline{1,n}$ має перпендикулярну (квазігрупову) пару типу $(\iota, \iota; i)$, тоді і тільки тоді, коли $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – (цілком) допустимі.

Доведення. Істинність даного твердження для $\{1, j\}$-ретрактів випливає із теореми 12. Аналогічно для довільних $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$ доводиться ізотопність квазігруп $f_{\{i,j\}}$ та f_i. За лемою 3, квазігрупа $f_{\{i,j\}}$ – (цілком) допустима тоді і тільки тоді, коли f_i – (цілком) допустима. З довільності i, j, $i \neq j$, випливає, що будь-який $\{i, j\}$-ретракт квазігрупи f є (цілком) допустимим тоді і тільки тоді, коли $f_1, \ldots, f_{n-1}$ – (цілком) допустимі бінарні квазігрупи.

Наступне твердження описує один із методів побудови перпендикулярних квазігруп максимального типу.

Наслідок 14. *Нехай f – n-арна квазігрупа з цілком допустимими $\{1, j\}$-ретрактами, $j \in \overline{2,n}$. Квазігрупи f та Tf, де $T = (\alpha, \underbrace{\iota, \ldots, \iota}_{n})$, перпендикулярні типу $(\iota, \iota; 1)$ тоді і тільки тоді, коли α має одну нерухому точку.*

Доведення. Перпендикулярність типу $(\iota, \iota; 1)$ квазігруп f та Tf рівносильна ортогональності їх однотипних $\{1, j\}$-ретрактів. Очевидно, що ці однотипні ретракти є ізотопними, причому ізотопізм має вигляд $T = (\alpha, \iota, \iota)$. Відповідно до теореми 8, це рівносильно тому, що α має одну нерухому точку. Відмітимо, що для інших видів кручень, крім середнього, істинними є аналогічні твердження.

Висновки. Підґрунтям для побудови n-арних квазігруп є вивчення допустимих бінарних квазігруп, тобто тих які мають ортогональну пару. Необхідні і достатні умови ортогональності різних кручень квазігрупи описані в теоремі 8. Таким чином, побудова таких ортогональних квазігруп зводиться до побудови майже неперехресних підстановок. Їх існування та кількість на множині потребує додаткового дослідження. Також відкритим залишається питання: *які умови мають виконуватися на підстановках, щоб повторна композиція довільних ізотопів бінарних квазігруп була квазігрупою.*
Побудовані тут n-арні квазігрупи та пари перпендикулярних квазігруп дають можливість будувати n-арні квазігрупи за допомогою повторної композиції двох квазігруп.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Белоусов В.Д. Системы ортогональних операций / В.Д. Белоусов // Математический сборник. – 1968. – Т.77 (119). – С .38-58.
2. Белявская Г.Б. О допустимости квазигрупп / Г.Б. Белявская, А.Ф. Руссу // Математические исследования. – 1975. – № 10, вып. 1. – С. 45-57.
3. Глухов М.М. Об α-замкнутых класах и α-полных системах функцій k-значной логики / М.М. Глухов // Дискретная математика. – 1989. – № 1. – С.16-21.
4. Оной В.И. n-Арные лупы со свойствами обратимости с одним параметром обращения / В.И. Оной, Л.А.Урсу // Квазигруппы и их системы, Кишинев ``Штиинца''. – 1990. – С. 72-82.
5. Сохацкий Ф.М. Многоместные разделимые квазигруппы со свойством обратимости // Математические исследования (Квазигруппы и их системы). – 1990. – вып. 113. – С. 89-99.
6. Evans A.B., Applications of complete mappings and ortomorphisms of finite groups / A.B Evans // Quasigroups and related systems. – 2015. – N 23, P. 5-30.
7. Keedwell A.D., Denes J. Latin Squares and their Applications / A.D. Keedwell, J. Denes. – Budapest: Academiai Kiado, 2015. – 545 p.
8. Krotov D.S. On irreducible n-ary quasigroups with reducible retracts / D.S. Krotov // European J. Comb. – 2008. – V. 29, N. 2. P. 507-513.
9. Krotov D.S. On reconstructing reducible n-ary quasigroups and switching subquasigroups / D.S. Krotov, V.N. Potapov, P.V.Sokolova // Quasigroups and Related Systems. – 2008. – V. 16, N 1. – P. 55-67.
10. Krotov D.S. Constructions of transitive latin hypercubes / D.S. Krotov, V.N. Potapov // arXiv:1303.0004v2 [cs.IT] 4 May 2015. – 16 p.
11. Paige L.J. Complete mappings of finite groups / L.J. Paige // Pacific J. Math. – 1951. – N 1. P. 111-116.
12. Sokhatsky F.M. Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups, / F.M. Sokhatsky, I.V. Fryz // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2012. – N 53, 3. 429-445.

О ПОСТРОЕНИИ n-АРНЫХ КВАЗИГРУПП

И.В. Фриз

РЕЗЮМЕ

В статье описана зависимость между полными подстановками изотопных квазигрупп и уточнен критерий существования ортогональной пары, найдены необходимые и достаточные условия, когда разные кручения бинарной квазигруппы являются ортогональными. Здесь сделаны первые шаги для решения проблемы построения n-арных квазигрупп, которые разлагаются в композицию двух квазигрупп. Для этого предложены алгоритмы построения квазигрупп с допустимыми бинарными ретрактами, найден метод построения пары перпендикулярных квазигрупп одинаковой арности.

Ключевые слова: полная подстановка, непересекающиеся подстановки, почти непересекающиеся подстановки, изотоп квазигруппы, ортогональность бинарных квазигрупп, n-арная квазигруппа, перпендикулярность квазигрупп.

ON CONSTRUCTION OF n-ARY QUASIGROUPS

I.V. Fryz

SUMMARY

In this article the relationships among complete permutations of isotopic quasigroups are described, a criterion of existence of orthogonal mate is specified, the necessary and sufficient conditions for orthogonality of torsion quasigroups are found. For solving the problem of construction of n-ary quasigroups which are decomposed into a composition of two quasigroups, some necessary statements are proved. For this goal algorithms of construction of quasigroups which have admissible binary retracts are proposed, method of construction of pair of perpendicular quasigroups of the same arity are found.

Keywords: complete permutation, disjoint permutations, near disjoint permutations, isotope of a quasigroup, perpendicularity of quasigroups.