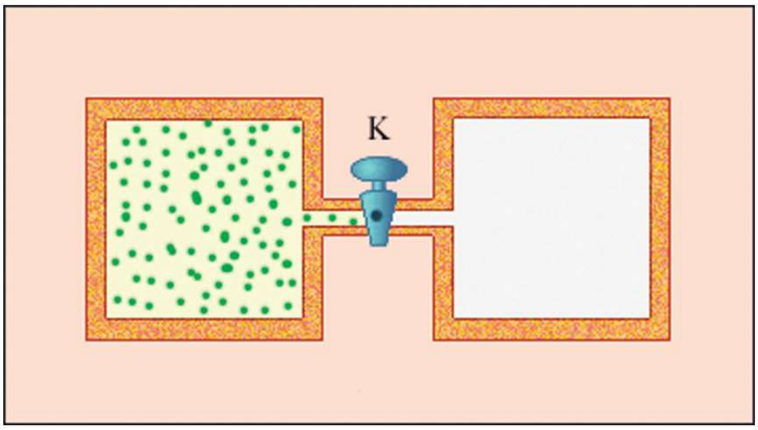
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ



ДонНУ
Винница
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова, З. Г. Зуйкова

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ

(методическое пособие для студентов дневной и заочной форм обучения специальностей направления «Компьютерные науки», «Математика», «Прикладная математика» и «Метрология и измерительная техника»)

Винница
ДонНУ
2015

УДК 378. 147:52
Р88

Составители: *В. Ф. Русаков,* проф.,
Н. М. Русакова, ст. пр.,
З. Г. Зуйкова, доц.

Рецензент: *В. М. Юрченко,* д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
ДонФТИ им. А. А. Галкина НАН Украины, профессор

Печатается по решению ученого совета физико-технического факультета Донецкого национального университета (протокол № 4 от 20.02.2015)

Р88 **Методика решения задач по молекулярной физике и термодинамике** (методическое пособие для студентов дневной и заочной форм обучения специальностей направления «компьютерные науки», «математика», «прикладная математика» и «метрология и измерительная техника») / В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова, З. Г. Зуйкова – Винница: ДонНУ, 2015. – 70 с.

Весь материал пособия разбит на шесть разделов, соответствующих основным разделам читаемых курсов. В начале каждого раздела приводятся основные понятия, дается краткая сводка формул, необходимых для решения задач. В каждом разделе подробно разобрана методика решения типовых задач. Наличие задач для контроля и самостоятельной работы позволяет обходиться на практических занятиях без дополнительных задачников.

Пособие может быть полезно всем, изучающим молекулярную физику.

УДК 378. 147:52
Р88

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ПРОЦЕССЫ

Состояние всякой системы описывается уравнением вида:

$$f(p,V,T)=0\,. \tag{1.1}$$

Это уравнение называется уравнением состояния. Для идеального газа оно записывается в виде:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT\,, \tag{1.2}$$

и называется уравнением Менделеева–Клапейрона. Здесь: p – давление газа, V – объем, им занимаемый, T – его абсолютная температура, m – масса, μ – молярная масса, R = 8,31 Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная. Из (1.2) легко получить газовые законы:

1. Закон Бойля–Мариотта. Для данной массы газа при постоянной температуре произведение его давления на объем есть величина постоянная:

$$pV=\mathrm{const}\,. \tag{1.3}$$

2. Закон Гей–Люссака. Для данной массы газа при постоянном давлении отношение его объема к абсолютной температуре есть величина постоянная:

$$V/T=\mathrm{const}\,. \tag{1.4}$$

3. Закон Шарля. Для данной массы газа при постоянном объеме отношение его давления к абсолютной температуре есть величина постоянная:

$$p/T=\mathrm{const}\,. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.2) можно переписать в иной форме:

$$pV=\upsilon RT=\upsilon N_A kT=NkT, \tag{1.6}$$

или

$$p=nkT\,. \tag{1.7}$$

Здесь $\upsilon = m/\mu$ – число молей газа, $N_A = 6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро (число частиц в моле вещества), $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, n – концентрация частиц, $R=N_A k$.

4. Закон Дальтона. Давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений p_i газов, входящих в смесь:

$$p=\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{RT}{V}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\mu_i}\,. \tag{1.8}$$

5. Уравнение Клаузиуса или основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$p=\frac{2}{3}n\langle E_k\rangle\,. \tag{1.9}$$

Здесь $\langle E_k \rangle = \dfrac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \dfrac{3}{2}kT$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну частицу.

Несколько практических советов по решению задач на применение газовых законов.

1. В общем случае для каждого состояния газа следует записать уравнение Менделеева–Клапейрона.
2. Замкнуть полученную систему, используя газовые законы, связывающие различные состояния, дополнительные условия задачи и т. д.
3. Решить полученную систему и проанализировать полученный результат.

ЕДИНИЦЫ ДАВЛЕНИЯ:
1 Па = 1 Н/м^2; 1 бар = 10^5 Па;
1 атм. физ. = $1{,}014 \cdot 10^5$ Па = 1,014 бар;
1 атм. техн. = $9{,}81 \cdot 10^4$ Па = 0,98 бар;
1 Торр = 1 мм. рт. ст. = 133,322 Па.

Примеры решения задач

<u>Задача 1.</u> Сколько молекул азота находится в сосуде объемом 1 л, если температура азота 27 °С, а давление равно 10^{-6} Торр. Чему равна его плотность при этих условиях?

Дано
$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
V = 1 л = 10^{-3} м^3
T = 300 К
$p = 10^{-6}$ Торр
N – ? ρ – ?

Воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона в форме (1.6):

$$pV = N\,kT. \tag{1}$$

Откуда

$$N = pV/\,kT. \tag{2}$$

Подставляя числовые значения, окончательно получаем:

$$N = 3{,}24 \cdot 10^{13}. \tag{3}$$

Учитывая, что $\rho = m/V$, запишем уравнение состояния в виде:

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT, \tag{4}$$

или

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{кг/м}^3. \tag{5}$$

Примечание. Наряду с плотностью ρ, в молекулярной физике часто пользуются понятием удельного объема $\nu = 1/\rho$, т. е. это объем, приходящийся на единицу массы.

Задача 2. В сосуде находится 16 г кислорода и 12 г гелия при температуре 100 °С и давлении 10^6 Па. Найти объем сосуда, плотность и молярную массу смеси.

$\mu_1 = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль
$\mu_2 = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль
$m_1 = 16\cdot10^{-3}$ кг
$m_2 = 12\cdot10^{-3}$ кг
$T = 373$ К
$p = 10^6$ Па

V – ? $\mu_{см}$ – ?

Воспользуемся законом Дальтона (1.8):

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right). \tag{1}$$

Откуда мгновенно следует:

$$V = \frac{RT}{p}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right). \tag{2}$$

Подставив числовые значения, получим:

$$V = 1{,}08\cdot10^{-2}\ \text{м}^3. \tag{3}$$

Плотность $\rho = m/V$, учитывая, что $m = m_1 + m_2$, а V определяется формулой (2), получим

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{p(m_1 + m_2)}{RT\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)}, \tag{4}$$

или с учетом (3): $\rho = 2{,}59$ (кг/м^3).

Определим молярную массу смеси. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси:

$$p = \frac{m_1 + m_2}{\mu_{см}}\frac{RT}{V}. \tag{5}$$

С другой стороны, из закона Дальтона следует:

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right). \tag{6}$$

Комбинируя (5) и (6), после несложных преобразований, получим:

$$\mu_{см} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = \frac{\upsilon_1\mu_1 + \upsilon_2\mu_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 8\ \text{г/моль}. \tag{7}$$

Задача 3. В сосуде объемом $V = 30$ л содержится идеальный газ при температуре 0 °С. После того, как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на $\Delta p = 7{,}8 \cdot 10^4$ Па при неизменной температуре. Найти массу выпущенного газа. Плотность данного газа при нормальных условиях $\rho_0 = 1{,}3$ г/л.

$\rho_0(p_0, T_0) = 1{,}3$ кг/м^3
$V = 30$ л $= 3 \cdot 10^{-2}$ м^3
$\Delta p = 7{,}8 \cdot 10^4$ Па
$T_0 = 273$ К
$\Delta m - ?$

Газ в сосуде находится в двух состояниях: до начала выпускания газа и после того, как этот процесс был закончен. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для каждого из состояний:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_0, \tag{1}$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_0. \tag{2}$$

Вычитая из первого уравнения второе, после несложных преобразований найдем:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\Delta p V \mu}{R T_0}. \tag{3}$$

Сюда входит неизвестная молярная масса μ. Ее можно найти, вспомнив, что плотность газа при нормальных условиях известна:

$$p_0 = \frac{\rho_0}{\mu} R T_0,$$

откуда

$$\mu = \frac{\rho_0 R T_0}{p_0}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) окончательно будем иметь:

$$\Delta m = \rho_0 V \frac{\Delta p}{p_0} = 30 \text{ г}. \tag{5}$$

Задача 4. Два одинаковых баллона соединены трубкой с клапаном, пропускающим газ из одного баллона в другой при разности давлений $\Delta p \geq 1{,}10$ бар. Сначала в одном баллоне был вакуум, а в другом идеальный газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 1{,}00$ бар. Затем оба баллона нагрели до температуры $t_2 = 107$ °С. Найти давление в баллоне, где был вакуум.

$\Delta p \geq 1{,}10 \cdot 10^5$ Па
$T_1 = 300$ К
$T_2 = 380$ К
$p_1 = 10^5$ Па
p_3 – ?

Имеем три различных состояния газа: газ в первом баллоне до нагревания

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1. \qquad (1)$$

Газ в этом же баллоне после нагревания

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2, \qquad (2)$$

и газ во втором баллоне после нагревания

$$p_3 V = \frac{m_3}{\mu} R T_2, \qquad (3)$$

здесь мы учли, что объемы баллонов одинаковы. Далее

$$m_2 + m_3 = m_1, \qquad (4)$$

т. к. во второй баллон перешла часть газа, первоначально находившегося в первом баллоне. Кроме того, давления в баллонах связаны соотношением

$$p_2 - p_3 = \Delta p. \qquad (5)$$

Уравнения (1) – (5) представляют замкнутую систему, решая которую, получим требуемый результат. Из (4) найдем:

$$m_2 = m_1 - m_3. \qquad (6)$$

Выражая m_1 и m_3 из (1) и (3) соответственно, будем иметь:

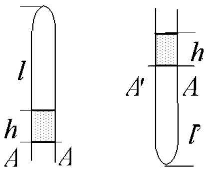
$$m_2 = \frac{V\mu}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_3}{T_3}\right). \qquad (7)$$

Подставляя найденное m_2 в уравнение (2) и учитывая, что $p_2 = p_3 + \Delta p$, после несложных преобразований найдем:

$$p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 T_2}{T_1} - \Delta p\right) = 10^4 \text{ Па}. \qquad (8)$$

Задача 5. Узкая цилиндрическая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути. Когда трубка обращена закрытым концом кверху, воздух внутри нее занимает длину l; когда же трубка обращена кверху открытым концом, то воздух внутри нее занимает длину $l' < l$. Длина ртутного столбика h. Определить атмосферное давление, считая $T = \text{const}$.

l
l'
h
$H - ?$



а) Рис. 1.1 б)

В данной задаче масса и температура газа не меняется, следовательно, процесс является изотермическим, т. е.

$$pV = const\,. \tag{1}$$

Давление удобно измерять в миллиметрах ртутного столба, т. к. тогда давление столбика ртути и его длина численно равны.

Пусть p_1 – давление воздуха в трубке, когда она обращена открытым концом вниз. Из условия равновесия нижней границы ртутного столбика (сечение $A - A$ на рис. 1.1*а*.) получим

$$p_1 + h = H\,,$$

откуда

$$p_1 = H - h\,. \tag{2}$$

Здесь H и h – атмосферное давление и давление столбика ртути соответственно.

Обозначим p_2 – давление воздуха в трубке, когда она обращена открытым концом кверху. Из условия равновесия сечения $A' - A'$ (рис. 1.1.*б*):

$$p_2 = H + h. \tag{3}$$

Объем газа можно представить в виде:

$$V = l \cdot S, \tag{4}$$

где S – площадь поперечного сечения трубки, l – длина столбика воздуха. Подставляя (2), (3) и (4) в (1) будем иметь:

$$(H - h) \cdot lS = (H + h) \cdot l'S,$$

откуда

$$H = \frac{h(l + l')}{l - l'}. \tag{5}$$

Соотношение (5) дает решение задачи, но атмосферное давление будет выражено в мм. рт. ст. Чтобы выразить H в паскалях, необходимо (5) умножить на $\rho_{рт.} g$:

$$H = \frac{h(l + l')}{l - l'} \rho_{рт.} g,$$

здесь $\rho_{рт.}$ – плотность ртути, g – ускорение свободного падения.

<u>Задача 6.</u> Найти число ходов n, поршня, чтобы поршневым насосом откачать сосуд емкостью V от давления p_1 до давления p_2, если емкость хода поршня равна v. Вредным пространством пренебречь. Температура в процессе откачки не меняется.

V, v
p_1, p_2

n – ?

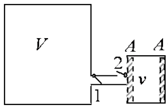


Рис. 1.2.

Прежде всего, смоделируем процесс откачки. Откачиваемый объем V соединен с насосом, емкостью хода поршня v (рис. 1.2). Объемом соединительных трубок, в соответствии с условием задачи, можно пренебречь. Два клапана впускной 1 и выпускной 2 управляют работой насоса. В начальный момент поршень находился в положении A. Клапан 1 – открыт, клапан 2 – закрыт. Поршень начинает перемещаться вправо, и газ из объема V начинает расширяться, переходя в объем v; когда поршень дойдет до крайнего правого положения A', объем газа станет $V + v$. По условию, T = const, значит, в пределах одного хода поршня процесс можно считать изотермическим:

$$p_1 V = p'(V+v), \tag{1}$$

p' – давление, которое установится в баллоне в результате одного хода поршня. После того, как поршень достигнет положения A', клапан 1 закрывается, клапан 2 открывается, и поршень начинает двигаться назад к положению A, при этом газ будет вытесняться в окружающую среду. Когда поршень достигнет положения A, клапан 2 закрывается, клапан 1 открывается, и всё начинается сначала, причем конечное давление предыдущего хода является исходным для последующего, и в пределах каждого хода поршня процесс изотермический.

После $2^{\underline{x}}$ ходов

$$p' V = p''(V+v), \tag{2}$$

после $3^{\underline{x}}$ ходов

$$p'' V = p'''(V+v), \tag{3}$$

и т.д., после n ходов

$$p^{(n-1)} V = p_2 (V+v). \tag{n}$$

Выражая из последнего равенства $p^{(n-1)}$, т. е. давление после (n - 1) хода, через p_2 и подставляя его в предыдущее уравнение, найдем $p^{(n-2)}$, повторяя эту процедуру вплоть до уравнения (1), найдем связь между p_1 и p_2:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n,$$

откуда

$$n = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(V/(V+v))}.$$

Написанное соотношение решает поставленную задачу.

Задача 7. В гладкой открытой с обоих концов вертикальной трубе, имеющей два разных сечения (рис. 1.3), находятся два поршня, соединенные нерастяжимой нитью, а между поршнями 1 моль идеального газа. Площадь сечения верхнего поршня на ΔS = 10 см^2 больше, чем нижнего. Общая масса поршней m = 5,0 кг. Давление наружного воздуха p_0 = 1,0 бар. На сколько кельвин надо нагреть газ между поршнями, чтобы они переместились на l = 5,0 см?

ν = 1 моль
ΔS = 10^{-3} м^2
m = 5,0 кг
p_0 = 10^5 Па
l = $5 \cdot 10^{-2}$ м

ΔT – ?

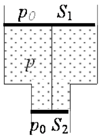


Рис 1.3

Прежде всего, выясним, почему при нагревании поршни будут перемещаться. Давление газа должно оставаться постоянным, т. к. внешние условия неизменны. Тогда при повышении температуры должен увеличиваться объем, т. е. поршни должны переместиться вверх.

Давление газа p между поршнями найдем из условия равновесия системы.

Силы направленные вниз:

а) сила тяжести, действующая на поршни: mg;

б) сила атмосферного давления, действующая на верхний поршень: p_0S_1;

в) сила давления газа, действующая на нижний поршень: pS_2.

Силы направленные вверх:

а) сила давления газа, действующая на верхний поршень: pS_1;

б) сила атмосферного давления, действующая на нижний поршень: p_0S_2.

Тогда

$$p_0 S_1 + mg + pS_2 = pS_1 + p_0 S_1 ,$$

или

$$p\Delta S = p_0 \Delta S + mg ,$$

откуда

$$p = \frac{p_0 \Delta S + mg}{\Delta S} . \qquad (1)$$

Газ между поршнями находится в двух состояниях: до и после нагревания:

$$pV_1 = \nu RT_1 , \qquad (2)$$

$$pV_2 = \nu RT_2 . \qquad (3)$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (2) и учитывая, что $\Delta V = \Delta Sl$, а давление дается выражением (1), получаем:

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{\nu R} = \frac{p_0 \Delta S + mg}{\nu R} l .$$

Подставляя числовые значения, найдем $\Delta T = 0{,}9$ К.

Задача 8. Газ с молярной массой μ находится под давлением p между двумя одинаковыми горизонтальными пластинами. Температура газа растет линейно от T_1 у нижней пластины до T_2 у верхней. Объем газа между пластинами равен V. Найти его массу.

T_1
T_2
μ
V

$m - ?$

Так как температура растет линейно от нижней пластины к верхней, удобно выбрать систему координат как показано на рисунке.

Тогда для температуры можем написать:

$$T(y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l} y, \tag{1}$$

здесь l – расстояние между пластинами.

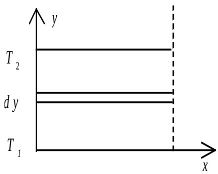


Рис. 1.4

Разобьем газ между пластинами на слои толщиной dy, параллельные пластинам так, чтобы внутри слоя можно было бы пренебречь изменением температуры. Считая площадь пластин S, для газа в этом слое можно написать уравнение состояния:

$$pS \cdot dy = \frac{dm}{\mu} RT(y), \tag{2}$$

dm – масса газа в выделенном слое. Из выражения (1) найдем dy:

$$dy = \frac{l}{T_2 - T_1} dT . \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и разделяя переменные, получим ($V = Sl$):

$$dm = \frac{pV\mu}{R(T_2 - T_1)} \frac{dT}{T} . \tag{4}$$

Интегрируя (4) с учетом граничных условий, окончательно будем иметь:

$$m = \frac{pV\mu}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Задачи для контроля

1. В колбе объемом V содержится газ под давлением p. Сколько молекул газа в колбе, если его температура T_0?

2. Вычислить массу молекулы кислорода (O_2).

3. Найти число молекул N_2 в 1 см^3 и плотность азота при давлении 10^{-11} мм. рт. ст. и температуре 15°С.

4. Определить плотность смеси, состоящей из $m_1 = 4$ г водорода и $m_2 = 32$ г кислорода при температуре 7 °С и давлении 700 мм. рт. ст.

5. В сосуде находится 14 г азота и 9 г водорода при температуре 100 °С и давлении 10^6 Па. Найти объем сосуда и молярную массу смеси.

6. Удельный объем газа при нормальных условиях $V = 5{,}6$ м^3/кг. Определить молярную массу газа. Что это за газ?

7. Сколько молекул водорода находится в объеме 1,55 л при температуре 27 °С и давлении 750 мм. рт. ст.?

8. Определить наименьшее возможное давление идеального газа в процессе, происходящем по закону $T = T_0 + \alpha V^2$, где T_0 и α – положительные постоянные, V – объем моля газа. Изобразить примерный график этого процесса в параметрах p, V.

9. Давление воздуха, заключенного в закрытом колене манометра длины l, уравновешивает столб ртути длиной h при барометрическом давлении H_0 и абсолютной температуре T_0. Какой столб ртути h_1 будет уравновешивать давление этого воздуха при барометрическом давлении H_1 и температуре T_1?

10. Сферическая оболочка воздушного шара сделана из материала, поверхностная плотность которого равна $\sigma = 1$ кг/м^2. Шар наполнен гелием при нормальном атмосферном давлении. При каком минимальном радиусе шар поднимет сам себя? Температуры гелия и окружающего воздуха одинаковы и равны 0 °С.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сосуд объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $t = 20$ °С и давлении $p = 2{,}0$ атм. Масса смеси $m = 5{,}0$ г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в данной смеси.

Ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \left(1 - a/M_2\right)/\left(a/M_1 - 1\right) = 0{,}50$, где $a = \dfrac{mRT}{pV}$.

2. В сосуде находится смесь $m_1 = 7{,}0$ г азота и $m_2 = 11$ г углекислого газа при температуре $T = 290$ К и давлении $p_0 = 1{,}0$ атм. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными.

Ответ: $\rho = \dfrac{p_0\left(m_1 + m_2\right)}{RT\left(m_1/M_1 + m_2/M_2\right)} = 1{,}5$ г/л.

3. В вертикальном закрытом с обоих торцов цилиндре находится массивный поршень, по обе стороны которого – по одному молю воздуха. При $T = 300$ К отношение верхнего объема к нижнему $\eta = 4{,}0$. При какой температуре это отношение станет $\eta' = 3{,}0$? Процесс считать изотермическим, газ – идеальным.

Ответ: $T' = T\left(\frac{\eta - 1/\eta}{\eta' - 1/\eta}\right) \approx 420$ К.

4. Найти давление воздуха в откачиваемом сосуде как функцию времени откачки *t*. Объем сосуда *V*, первоначальное давление p_0. Процесс откачки считать изотермическим и скорость откачки – не зависящей от давления и равной *C*.

Примечание. Скоростью откачки называют объем газа, откачиваемый за единицу времени, причем этот объем измеряется при давлении газа в данный момент.

Ответ: $p = p_0 \exp(-Ct/V)$.

5. Камеру объемом *V* = 87 л откачивают насосом, скорость откачки которого (см. примечание к предыдущей задаче) *C* = 10 л/с. Через сколько времени давление в камере уменьшится в η = 1000 раз? Ответ: $t = (V/C)\ln\eta = 1{,}0$ мин.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Вероятность того, что модуль скорости частицы лежит в скоростном интервале от *v* до *v* + *dv*, равна:

$$dp(v) = f(v)dv, \tag{2.1}$$

где *f*(*v*) – максвелловская функция распределения по модулям скоростей:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \tag{2.2}$$

здесь *m* – масса частицы, *T* – температура газа, *k* – постоянная Больцмана.

Вероятность того, что *x* – проекция скорости частицы лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, при произвольных значениях *y* – и *z* – проекций, есть:

$$dp(v_x) = f(v_x)dv_x, \tag{2.3}$$

где $f(v_x)$ – функция распределения частиц по *x* – компоненте скорости:

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}. \tag{2.4}$$

В общем случае вероятность того, что компоненты v_x, v_y, v_z скорости $\vec{v}$ будут лежать в интервалах от v_x до $v_x + dv_x$; от v_y до $v_y + dv_y$; от v_z до $v_z + dv_z$, равна:

$$dp(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z. \tag{2.5}$$

Учитывая, что $dp(v) = \frac{dn(v)}{n}$, где *dn*(*v*) – число частиц, скорости которых лежат в интервале от *v* до *v* + *dv*, получим:

$$dn(v) = dp(v)n = nf(v)dv\,. \tag{2.6}$$

В случае малых интервалов изменения скоростей вместо (2.6) можно написать:

$$\Delta n(v) = nf(v)\Delta v\,. \tag{2.7}$$

Здесь $\Delta n(v)$ – число частиц, скорости которых лежат в конечном, но малом интервале Δv вблизи значения v. В общем случае, чтобы найти число частиц, модули скорости которых лежат в интервале от v_1 до v_2, необходимо проинтегрировать (2.6) с функцией (2.2):

$$\Delta n(v_1 \le v \le v_2) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\int_{v_1}^{v_2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv\,. \tag{2.8}$$

Среднее значение некоторой функции скорости $\varphi(v)$, по ансамблю частиц, подчиняющихся распределению Максвелла, есть:

$$\langle\varphi(v)\rangle = \int_0^{\infty}\varphi(v)f(v)dv\,. \tag{2.9}$$

Для среднего $\varphi(v_x)$, по аналогии получим:

$$\langle\varphi(v_x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v_x)f(v_x)dv_x\,. \tag{2.10}$$

Интегралы (2.9) и (2.10) берутся по всему интервалу изменения переменных.

Распределение Больцмана дает распределение частиц по потенциальным энергиям во внешнем потенциальном силовом поле:

$$n(\varepsilon_n) = n_0 e^{-\varepsilon_n/kT}\,. \qquad (2.10)$$

Здесь n_0 – концентрация частиц при $\varepsilon_n = 0$, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Из (2.10) легко получить барометрическую формулу для изотермической атмосферы в однородном поле тяготения:

$$p(h) = p_0 e^{-mgh/kT} = p_0 e^{-\mu gh/RT}\,. \tag{2.11}$$

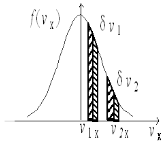
Здесь m – масса одной молекулы, μ – молярная масса газа, p_0 – давление на поверхности Земли, h – высота, T – температура, k и R – постоянная Больцмана и универсальная газовая постоянная соответственно.

Примеры решения задач

<u>Задача 1</u>. Найти для газообразного азота при T = 300 К отношение числа молекул с компонентами скорости вдоль оси x в интервале 300±0,31 м/с к числу частиц с компонентами вдоль той же оси в интервале 500±0,51 м/с.

$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$v_{x1} = 300$ м/с
$\delta v_{x1} = 0.31$ м/с
$v_{x2} = 500$ м/с
$\delta v_{x2} = 0,51$м/с
$T = 300$ К

$\Delta n(v_{x_1}) / \Delta n(v_{x_2}) - ?$



Изобразим график функции $f(v_x)$, тогда относительные числа частиц будут даваться заштрихованными площадями, а их отношение даст ответ на вопрос задачи, т. к. число частиц в системе неизменно.

Учитывая малость интервала изменения скорости и тот факт, что скорости могут отличаться как в сторону больших, так и меньших значений от v_x (т. е. $\Delta v_{xi} = 2 \cdot \delta v_{xi}$), можем использовать формулу (2.7) для одной проекции скорости:

$$\Delta n(v_x) = n\, f(v_x)\, \Delta v_x \,. \qquad (1)$$

Для двух значений скорости, с учетом (2.4) будем иметь:

$$\Delta n(v_{x_1}) = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_{x_1}^2}{2kT}} 2\delta v_{x_1}, \qquad (2)$$

и

$$\Delta n(v_{x_2}) = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_{x_2}^2}{2kT}} 2\delta v_{x_2}. \qquad (3)$$

Разделив соотношение (2) на (3), получим:

$$\frac{\Delta n(v_{x_1})}{\Delta n(v_{x_2})} = e^{\frac{m}{2kT}\left(v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2\right)} \frac{\delta v_{x_1}}{\delta v_{x_2}},$$

или

$$\frac{\Delta n(v_{x_1})}{\Delta n(v_{x_2})} = e^{\frac{\mu}{2RT}\left(v_{x_2}^2 - v_{x_1}^2\right)} \frac{\delta v_{x_1}}{\delta v_{x_2}}. \qquad (4)$$

Подставляя в (4) числовые значения, найдем:

$$\frac{\Delta n(v_{x_1)}}{\Delta u(v_{x_2})} = 1{,}49\,.$$

<u>Задача 2</u>. Найти $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ – среднее значение обратной скорости молекул идеального газа при температуре T, если масса каждой молекулы равна m. Сравнить полученную величину с обратной величиной средней скорости. Считать, что газ подчиняется распределению Максвелла.

m
T

$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle - ?$

Воспользовавшись для расчета среднего формулой (2.3), запишем:

$$\left\langle \tfrac{1}{v} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{v} f\left(v\right) dv.$$

Подставляя вместо функции распределения $f(v)$ ее значение из (2.2), получим интеграл:

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv . \qquad (1)$$

Сделав замену переменных $x = \frac{mv^2}{2kT}$, придем к интегралу, который легко вычисляется:

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty e^{-x} dx = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} . \qquad (2)$$

Поскольку найденное значение необходимо сравнить с обратной величиной средней скорости, рассчитаем ее:

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv . \qquad (3)$$

Выполняя в (3) ту же замену, что и в (1), будем иметь:

$$\langle v \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} . \qquad (4)$$

Сопоставляя (2) и (4), видим, что $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\langle v \rangle}$, т. е. в общем случае

$$\left\langle \frac{1}{\varphi(v)} \right\rangle \neq \frac{1}{\langle \varphi(v) \rangle} .$$

<u>Примечание.</u> При расчете различных средних встречаются интегралы типа (3), которые заменой переменной сводятся к гамма-функции целого или полуцелого аргумента:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! . \qquad (5)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\infty x^{n-1/2} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n} . \qquad (6)$$

<u>Задача 3.</u> Используя функцию распределения Максвелла по скоростям, получить функцию распределения по импульсам. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T.

$f(v)$
m
T
$f(p)$ – ?

Для решения задачи, вспомним, что $f(v)$ – относительное число частиц, скорости которых лежат в единичном интервале вблизи заданного значения скорости:

$$\frac{1}{n}\frac{dn(v)}{dv} = f(v),$$

или

$$dn(v) = nf(v)dv. \qquad (1)$$

Таким образом, в (1) необходимо перейти от скорости к импульсу и затем определить относительное число частиц, импульсы которых лежат в единичном интервале вблизи заданного значения импульса. Подставляя в (1) значение $f(v)$ из (2.2) запишем:

$$dn(v) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \qquad (2)$$

Сделаем в (2) замену переменных: $v = p/m; dv = dp/m$. Тогда:

$$dn(p) = n\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \frac{p^2}{m^2} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \frac{dp}{m}, \qquad (3)$$

откуда:

$$\frac{1}{n}\frac{dn(p)}{dp} = f(p) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2mkT}\right)^{3/2} p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) решает поставленную задачу. Аналогично решается задача об определении функции распределения молекул по энергиям.

Задача 4. Определить скорость v молекул азота, при которой значение функции $f(v)$ для температуры T_0, будет таким же, как и для температуры, в η раз большей.

N_2
T_0
$T_1 = \eta T_0$

v – ?

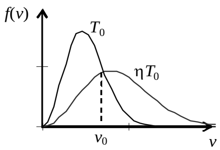


Рис. 2.2

По сути дела, необходимо найти то значение скорости, при котором пересекаются графики функций распределения для температур T_0 и ηT_0 (рис. 2.2), т. е. выполняется условие:

$$f(v_0, T_0) = f(v_0, \eta T_0). \qquad (1)$$

Подставляя в (1) значения функции распределения получим:

$$\left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{3/2} v_0^2 e^{-\frac{mv_0^2}{2kT_0}} = \left(\frac{m}{2\eta kT_0}\right)^{3/2} v_0^2 e^{-\frac{mv_0^2}{2\eta kT_0}}. \qquad (2)$$

Из выражения (2) после элементарных преобразований найдем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT_0}{m}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)\ln\eta}\,. \qquad (3)$$

<u>Задача 5.</u> Идеальный газ с молярной массой μ находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде, площадь основания которого S и высота H. Температура газа T, его давление на нижнее основание p_0. Считая, что температура и ускорение свободного падения g не зависят от высоты, найти массу газа в сосуде.

g = *const*
μ

m–?

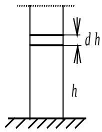


Рис. 2.3

Поскольку поле однородно (g = const), и температура не зависит от высоты, для газа в сосуде справедливо распределение Больцмана. Умножая (2.10) на массу одной частицы и учитывая, что $\rho = nm$, получим:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\,. \qquad (1)$$

Выделим в сосуде на высоте h слой толщиной dh, такой, чтобы можно было считать, что в пределах этого слоя плотность неизменна. Легко определить массу этого слоя:

$$dM = \rho dV = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} S dh\,. \qquad (2)$$

Проинтегрировав выражение (2) по всей высоте сосуда, определим массу газа в сосуде:

$$M = \rho_0 S \int_0^H e^{-\frac{\mu g h}{RT}} dh = \rho_0 S \frac{RT}{\mu g}\left(1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}\right). \qquad (3)$$

Плотность газа на поверхности Земли найдем из уравнения Клапейрона–Менделеева, зная p_0 и учитывая постоянство температуры:

$$\rho_0 = \frac{p_0 \mu}{RT}\,. \qquad (4)$$

Подставляя ρ_0 из (4) в выражение (3) окончательно найдем:

$$M = \frac{p_0 S}{g}\left(1 - e^{-\frac{\mu g H}{RT}}\right). \qquad (5)$$

Из соотношения (5) можно получить массу газа в бесконечно высоком сосуде, например массу атмосферного столба воздуха, площадью основания S , для этого достаточно устремить $H \to \infty$, тогда:

$$M = \frac{p_0 S}{g}\,. \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет определить массу земной атмосферы M_a, для этого в качестве S необходимо взять площадь поверхности Земли. Считая Землю шаром радиусом $R_З$, получим:

$$M_a = \frac{p_0}{g} 4\pi R_з^2 . \tag{7}$$

Подставляя в (7) числовые значения найдем $м_a \approx 5{,}1\cdot10^{18}$ кг, что значительно меньше массы самой Земли ($M_З = 6\cdot10^{24}$ кг).

Задача 6. Идеальный газ с молярной массой μ находится в очень высоком вертикальном цилиндрическом сосуде в однородном поле тяжести, для которого ускорение свободного падения равно g. Считая температуру газа всюду постоянной и равной T, найти высоту, на которой находится центр масс газа.

μ
$g = const$
$T = const$
$h_c - ?$

Условие задачи позволяет утверждать, что газ подчиняется распределению Больцмана. Как известно из механики, радиус-вектор центра масс определяется соотношением:

$$\vec{R}_c = \int\limits_{(V)} \vec{r}\rho dV \Big/ \int\limits_{(V)} \rho dV , \tag{1}$$

где интегрирование ведется по всему объему тела. В качестве физически малого объема будем рассматривать слой газа, в пределах которого можно пренебречь изменением плотности (см. предыдущую задачу, формулы (1) и (2)).

Учитывая одномерность задачи, перейдем от $\vec{R}_c$ к h_c. Тогда

$$h_c = \frac{\int\limits_0^\infty h\rho_0 S e^{-\frac{\mu g h}{RT}} dh}{\int\limits_0^\infty \rho_0 S e^{-\frac{\mu g h}{RT}} dh} . \tag{2}$$

Верхние пределы продлены до ∞, т. к. сказано, что сосуд очень высокий. Расчет интегралов, входящих в (2) можно провести непосредственно, сосчитав отдельно числитель и знаменатель. Мы поступим несколько иначе. Введем обозначение: $\alpha = \frac{\mu g}{RT}$ и перепишем (2), обратив внимание на тот факт, что в числителе стоит производная от знаменателя по α с противоположным знаком:

$$h_c = -\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln \int\limits_0^\infty e^{-\alpha h} dh = \frac{\partial}{\partial\alpha} \ln\alpha = \frac{1}{\alpha} = \frac{RT}{\mu g}. \tag{3}$$

Таким образом, центр масс находится на высоте, на которой плотность уменьшается в e раз.

Задача 7. Идеальный газ с молярной массой μ находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при $h = 0$ давление p_0, а температура изменяется с высотой по закону $T = T_0(1+\alpha h)$.

$g = const$
$p(0) = p_0$
$T = T_0(1+\alpha h)$.
$p(h) - ?$

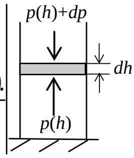


Рис. 2.4

Распределение Больцмана применить нельзя, т. к. оно получено в предположении изотермической атмосферы. Выделим столб газа с единичной площадью основания и на высоте h рассмотрим слой газа толщиной dh, такой, чтобы можно было пренебречь изменением плотности в пределах слоя.

Сверху на газ действует сила $p(h)+dp$, снизу $p(h)$ (площадь основания столба $S = 1$ м^2). Условие равновесия выделенного слоя запишется в виде:

$$dp = -\rho g dh. \tag{1}$$

Выразим плотность из уравнения Менделеева–Клапейрона $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$ и подставим его в уравнение (1), с учетом заданной зависимости $T(h)$.

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT_0}\frac{dh}{1+\alpha h}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{p_0}^{p(h)}\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0}\int_0^h\frac{dh}{1+\alpha h}. \tag{2}$$

Выполняя в (2) элементарные преобразования, получим:

$$\ln\frac{p(h)}{p_0} = -\frac{\mu g}{\alpha RT_0}\ln|1+\alpha h|,$$

или

$$p(h) = p_0(1+\alpha h)^{-\frac{\mu g}{\alpha RT_0}}. \tag{3}$$

Как видно, зависимость (3) существенно отличается от барометрической формулы, полученной в предположении изотермической атмосферы.

Задача 8. Горизонтально расположенную трубку с закрытыми торцами вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящий через один из ее торцов. В трубке находится углекислый газ при температуре $T = 300$ К. Длина трубки $l = 100$ см. Найти значение ω, при котором отношение концентраций молекул у противоположных торцов трубки $\eta = 2{,}0$.

$\mu_{CO_2} = 44$ г/моль
$T = 300$ К
$l = 1$ м
$\eta = \dfrac{n(l)}{n(0)} = 2{,}0$

$\omega - ?$

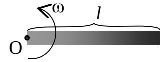


Рис. 2.5.

На рисунке 2.5. изображен вид сверху. Поскольку трубка расположена горизонтально, сила тяжести не влияет на распределение частиц по ее длине. Будем считать трубку достаточно тонкой, так чтобы можно было пренебречь изменением концентрации газа по ее толщине.

Тогда молекулы газа будут находиться в поле центробежных сил инерции $F_l = m\omega^2 l$. Вспоминая, что $F_l = -\dfrac{\partial U}{\partial l}$ (задача одномерная), найдем потенциальную энергию молекул:

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 l^2. \tag{1}$$

Подставляя (1) в распределение (2.10), будем иметь:

$$n(l) = n(0)e^{\frac{m\omega^2 l^2}{2kT}}. \tag{2}$$

Учитывая, что $\dfrac{n(l)}{n(0)} = \eta$, запишем:

$$\eta = e^{\frac{\mu\omega^2 l^2}{2RT}},$$

или

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2RT}{\mu}\ln\eta}.$$

Подставляя численные значения, получим $\omega \approx 280$ (рад/с).

<u>Задача 9</u>. Найти давление, оказываемое молекулярным пучком на зеркальную стенку, расположенную перпендикулярно оси пучка. Скорость молекул в пучке v_0, масса одной молекулы m_0, концентрация молекул n_0.

v_0
m_0
n_0

$p - ?$

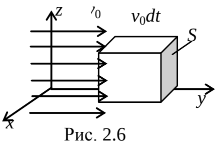


Рис. 2.6

Давление, испытываемое стенкой, определяется средней силой, действующей на единицу площади. Т. к. стенка зеркальная, при столкновении с ней импульс каждой частицы изменяется на противоположный по направлению, не изменяясь по модулю, тогда импульс силы, действующей на молекулу, есть изменение ее импульса:

$$d\vec{P} = -2m_0\vec{v}_0. \tag{1}$$

В соответствии с третьим законом Ньютона, такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получает стенка:

$$d\vec{\Pi} = -d\vec{P} = 2m_0\vec{v}_0 \,. \qquad (2)$$

За время Δt стенка провзаимодействует с большим количеством молекул, поэтому, с учетом постоянства скорости частиц в пучке, импульс средней силы, действующей на стенку, можно записать в виде:

$$F\Delta t = d\Pi\Delta N \,, \qquad (3)$$

ΔN – число молекул, провзаимодействовавших со стенкой за время Δt. Его можно легко подсчитать, учитывая, что за Δt до стенки дойдут молекулы, находящиеся от нее не далее чем $l = v_0\Delta t$. Т. е. ΔN – это число частиц, содержащихся в прямом параллелепипеде высотой $v_0\Delta t$ и площадью основания S. Тогда

$$\Delta N = n_0 v_0 S\Delta t \,. \qquad (4)$$

Подставляя найденное ΔN из (4) в (3) и деля на Δt и S, получим искомое давление:

$$p = 2n_0 m_0 v_0^2 = 4n_0\langle E_k\rangle \,. \qquad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что, как и в случае идеального газа, находящегося в равновесии, давление пропорционально кинетической энергии поступательного движения, правда, с другим коэффициентом пропорциональности, что обусловлено характером движения молекул.

<u>Задача 10</u>. Сосуд с газом из жестких двухатомных молекул движется со скоростью u. Найти приращение среднего квадрата скорости теплового движения молекул при полной внезапной остановке сосуда. Считать, что теплообмена между газом и стенками сосуда нет.

$i=5$
u
$\Delta\langle v_0^2\rangle$ – ?

При внезапной полной остановке сосуда кинетическая энергия макроскопического механического движения перейдет во внутреннюю энергию, и именно она и обусловит приращение кинетической энергии каждой отдельной молекулы, а, следовательно, и среднего квадрата скорости. Когда сосуд движется, каждая частица участвует в двух движениях: хаотическом со скоростью v_0 и упорядоченном (вместе с сосудом) со скоростью u.

Тогда скорость результирующего движения есть:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \,, \qquad (1)$$

а кинетическая энергия:

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 v_0^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0(\vec{u}\,\vec{v}_0), \quad (2)$$

m_0 – масса одной молекулы.

Чтобы определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения, приходящуюся на одну молекулу необходимо выражение (2) усреднить по всем значениям скорости теплового движения. При этом последнее слагаемое в (2) обратится в нуль, в силу равновероятности всех направлений скорости хаотического движения:

$$\frac{m_0\langle v^2\rangle}{2} = \frac{m_0\langle v_0^2\rangle}{2} + \frac{m_0 u^2}{2}. \quad (3)$$

Тогда полную среднюю энергию одной молекулы можно представить в виде суммы средней энергии теплового движения и энергии направленного движения

$$\langle E_k\rangle = \langle E_k^0\rangle + \frac{m_0 u^2}{2}, \quad (4)$$

причем в $\langle E_k^0\rangle$ входит как энергия поступательного, так и энергия вращательного теплового движения:

$$\langle E_k^0\rangle = \frac{i}{2}kT_0. \quad (5)$$

Средняя энергия поступательного движения:

$$\langle E_k^0\rangle_{пост} = \frac{m_0\langle v_0^2\rangle}{2} = \frac{3}{2}kT_0. \quad (6)$$

Комбинируя соотношения (5) и (6) получим:

$$\frac{m_0\langle v_0^2\rangle}{2} = \frac{3}{i}\langle E_k^0\rangle. \quad (7)$$

Откуда приращение среднего квадрата скорости определяется приращением полной энергии, приходящейся на одну молекулу:

$$\frac{m_0\Delta\langle v_0^2\rangle}{2} = \frac{3}{i}\Delta\langle E_k^0\rangle, \quad (8)$$

здесь $\Delta\langle v_0^2\rangle = \langle v^2\rangle - \langle v_0^2\rangle$; $\Delta\langle E_k^0\rangle = \langle E_k\rangle - \langle E_k^0\rangle$. Находя $\Delta\langle E_k^0\rangle$ из (4) и подставляя результаты в (8) найдем: $\Delta\langle v_0^2\rangle = \frac{3}{i}u^2$, или $\Delta\langle v_0^2\rangle = \frac{3}{5}u^2$.

Задачи для контроля

1. Вычислить массу столба воздуха высотой 10^3 м и сечением 1 $м^2$, если плотность воздуха у поверхности Земли ρ_0 = 1,29 кг/$м^3$, а давление $p_0 = 10^5$ Па. Температура всюду одинакова.

2. На какой высоте плотность газа составляет 50 % от плотности его на уровне моря? Температуру считать постоянной и равной 0 °С. Задачу решить для: 1) воздуха и 2) водорода.

3. Получить закон, выражающий изменение давления воздуха с высотой, если температура изменяется по закону $T = -\alpha H$, где α = const.

4. Как изменится давление воздуха при подъеме на высоту $h = 10^5$ м, если температура постоянна и равна 0 °С?

5. Газ состоит из молекул, масса каждой из которых равна m. При какой температуре этого газа число молекул со скоростями в заданном малом интервале (v, $v + \delta v$) будет максимально? Найти наиболее вероятную скорость молекул, соответствующую такой температуре.

6. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T. Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии молекул газа.

Задачи для самостоятельного решения

1. Считая, что температура и молярная масса воздуха, а также ускорение свободного падения не зависят от высоты, найти разность высот, на которых плотности воздуха при температуре 0 °С отличаются:

а) в e раз; б) на η = 1,0 %.

Ответ: а) $h = RT/Mg$ = 8,0 км; б) $h \approx \eta RT/Mg$ = 0,08 км.

2. Идеальный газ с молярной массой μ находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Найти давление газа как функцию высоты h, если при h = 0 давление $p = p_0$, a температура изменяется с высотой как $T = T_0(1\text{-}ah)$, где a – положительная постоянная.

Ответ: а) $p = p_0\,(1 - ah)^n$, $h < 1/a$, $n = \dfrac{Mg}{aRT_0}$.

3. Закрытую с обоих торцов горизонтальную трубку длины l = 100 см перемещают с постоянным ускорением a, направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при температуре T = 330 K. При каком значении a концентрации аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на η = 1,0 %?

Ответ: $a \approx \eta RT/Ml \approx 70\ g$.

4. Горизонтальный цилиндр, закрытый с одного конца, вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый конец цилиндра. Давление воздуха снаружи p_0, температура T, молярная масса воздуха μ. Найти давление воздуха как функцию расстояния r от оси вращения. Молярную массу считать не зависящей от r.

Ответ: $p = p_0 \exp(M\omega^2 r^2 / 2RT)$.

5. Смесь водорода и гелия находится при температуре $T = 300$ К. При каком значении скорости v молекул значения функции $f(v)$ будут одинаковыми для обоих газов?

Ответ: $v = \sqrt{3kT \ln(m_2/m_1)/(m_2 - m_1)} = 1{,}61$ км/с.

6. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении плотность ρ = 1,00 г/л.

Ответ: $v_{\text{вер}} = \sqrt{2p/\rho} = 0{,}45$ км/с, $\langle v \rangle = 0{,}51$ км/с, $v_{\text{кв}} = 0{,}55$ км/с.

7. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на δη = 1,00 % от значения:

а) наиболее вероятной скорости;

б) средней квадратичной скорости.

Ответ: а) $\delta N/N = \left(8/\sqrt{\pi}\right) e^{-1} \delta\eta = 1{,}66$ %;

б) $\delta N/N = 12\sqrt{3/2\pi}\, e^{-3/2} \delta\eta = 1{,}85$ %.

8. Газ состоит из молекул массы m и находится при температуре T. Найти с помощью функции $f(v)$:

а) функцию распределения молекул по кинетическим энергиям $f(\varepsilon)$; изобразить примерный график $f(\varepsilon)$;

б) наиболее вероятное значение кинетической энергии $\varepsilon_{\text{вер}}$; соответствует ли $\varepsilon_{\text{вер}}$ наиболее вероятной скорости?

Ответ: а) $f(\varepsilon) = 2\pi(\pi kT)^{-3/2} e^{-\varepsilon/kT} \sqrt{\varepsilon}$; б) $\varepsilon_{\text{вер}} = kT/2$; $\varepsilon_{\text{вер}} \neq \varepsilon\,(v_{\text{вер}})$.

3. I НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

1. Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии в применении к тепловым процессам: количество теплоты, сообщенное термодинамической системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и совершение системой работы против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A, \tag{3.1}$$

или в дифференциальной форме:

$$dQ = dU + dA, \tag{3.2}$$

где:

$$dQ = CdT = mc^{у} dT = \frac{m}{\mu} C^{\mu} dT, \tag{3.3}$$

элементарное количество теплоты, сообщенное системе, m и μ – масса и молярная масса, C, $c^{у}$ и C^{μ} – полная, удельная и молярная теплоемкости соответственно, из (3.3) следует (i – число степеней свободы):

$$C^{\mu} = \mu c^{у}, \tag{3.4}$$

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V^{\mu} dT = C_V dT = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} RdT, \tag{3.5}$$

приращение внутренней энергии, C_V – теплоемкость при постоянном объеме. Последнее равенство в (3.5) справедливо только для идеального газа. Из (3.5) следует:

$$C_V^{\mu} = \frac{i}{2} R, \tag{3.6}$$

Элементарная работа против сил внешнего давления p:

$$dA = pdV, \tag{3.7}$$

Конечные значения Q, ΔU, A получаются интегрированием соотношений (3.3), (3.5) и (3.7). Внутренняя энергия есть функция состояния системы, а количество теплоты и работа являются функциями процесса.

2. Теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и объеме связаны уравнением Р. Майера:

$$C_p^{\mu} - C_V^{\mu} = R. \tag{3.8}$$

Процессы, протекающие при постоянной теплоемкости, называются политропическими и описываются уравнением:

$$pV^n = \text{const}, \tag{3.9}$$

где

$n = \dfrac{C - C_p}{C - C_V}$ – показатель политропы, C – теплоемкость в данном процессе. В случае адиабатического процесса

$$n = \gamma = \frac{C_p}{C_V}. \qquad (3.10)$$

Используя (3.10), (3.8), (3.9) и (3.6) можно легко получить следующие соотношения:

$$C_V^{\mu} = \frac{R}{\gamma - 1};\ C_p^{\mu} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R;\ C_p^{\mu} = \frac{i+2}{2} R; \qquad (3.11)$$

$$C^{\mu} = \frac{(n-\gamma)R}{(n-1)(\gamma-1)}; \qquad (3.12)$$

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \qquad (3.13)$$

3. Работа термодинамической системы в различных процессах:

а) политропическом:

$$A = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right] = \frac{\nu R T_1}{n-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]; \qquad (3.14)$$

б) изобарном:

$$A = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1); \qquad (3.15)$$

в) изотермическом:

$$A = \nu R T \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R T \ln\frac{P_1}{P_2}; \qquad (3.16)$$

г) изохорном:

$$A = 0; \qquad (3.17)$$

д) адиабатном:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \nu C_V^{\mu}(T_1 - T_2). \qquad (3.18)$$

В дальнейшем в качестве физической системы будем рассматривать идеальный газ, для которого уравнением состояния является уравнение Менделеева–Клапейрона.

Примеры решения задач

Задача 1. Некоторый газ при нормальных условиях имеет плотность $\rho = 1{,}41$ кг/м^3. Определить, что это за газ и его удельные теплоемкости c_p^y и c_V^y.

$P = 10^5$ Па
$T = 273$ К
$\rho = 1{,}41 \text{кг/м}^3$

$\mu,\ c_V^y,\ c_p^y - ?$

Начнем с выяснения вопроса, что это за газ. Для этого необходимо найти его молярную массу. Это легко сделать, использовав уравнение Менделеева–Клапейрона и учитывая, что $\rho = m/V$:

$$\mu = \frac{\rho RT}{p}. \tag{1}$$

Подставляя численные значения, найдем, что μ = 31,98 г/моль, что соответствует кислороду. Учитывая, что кислород – газ двухатомный и считая молекулы жесткими, определим число степеней свободы: $i = 5$. Используя соотношения (3.4), (3.6) и последнее из равенств (3.11), получим:

$$c_p^y = \frac{i+2}{2\mu} R = \frac{(i+2)p}{2\rho T}. \tag{2}$$

$$c_V^y = \frac{i}{2\mu} R = \frac{ip}{2\rho T}. \tag{3}$$

Подставляя в (2) и (3) числовые значения, получим c_p^y = 909 Дж/(кг·К), c_V^y = 649 Дж/(кг·К).

Задача 2. При изотермическом расширении кислорода массой m было затрачено количество теплоты Q. Определить, как изменилось давление газа, если его начальная температура была T.

m, μ, Q, T

$\dfrac{p_2}{p_1} = ?$

При изотермическом процессе все подводимое тепло идет на совершение газом работы, т. к. внутренняя энергия не изменяется вследствие закона Джоуля:

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \tag{1}$$

Откуда мгновенно получаем

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left(-\frac{Q\mu}{mRT}\right). \tag{2}$$

Задача 3. Массу m кислорода нагревают при постоянном давлении от температуры T_1 до температуры T_2. Какое количество теплоты сообщают газу? Каков прирост внутренней энергии? Какую работу совершает газ?

O_2, μ, m
$p = const$
T_1, T_2

$Q, \Delta U, A - ?$

Количество теплоты, сообщенное системе, определяется соотношением (3.3), с учетом того, что $p = const$, перепишем его в интегральной форме:

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p^{\mu} (T_2 - T_1), \quad (1)$$

здесь μ – молярная масса. Используя для C_p^{μ} выражение (3.11), для количества теплоты найдем:

$$Q = \frac{i+2}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Чтобы определить приращение внутренней энергии, воспользуемся соотношением (3.5) в интегральной форме:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Работу найдем, воспользовавшись I началом термодинамики (3.1):

$$A = Q - \Delta U. \quad (4)$$

Подставляя в (4) соотношения (2) и (3) получим:

$$A = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (5)$$

Заметим, что соотношение (5) легко получить, комбинируя выражение для работы в изобарном процессе и уравнение Менделеева–Клапейрона.

Задача 4. При сжатии кислорода при постоянном давлении была совершена работа 16 кДж. Определить изменение внутренней энергии и количество теплоты, сообщенной газу.

O_2
$A' = 16$ кДж
$p = const$

ΔU – ? Q – ?

Поскольку газ сжимался, работа, совершенная газом отрицательна и равна работе совершенной над газом с противоположным знаком:

$$A = -A'. \quad (1)$$

Но с другой стороны работа газа в изобарном процессе есть (см. (3.15) или формулу (5) предыдущей задачи):

$$A = \frac{m}{\mu} R \Delta T = -A'. \quad (2)$$

Приращение внутренней энергии тогда легко найти:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = -\frac{i}{2} A', \quad (3)$$

для кислорода $i = 5$.

Воспользовавшись первым началом термодинамики, найдем количество теплоты:

$$Q = \Delta U + A = -\frac{i+2}{2} A'. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) показывают, что в процессе изобарного сжатия внутренняя энергия уменьшается и газ отдает тепло в окружающую среду.

Подставляя числовые значения, окончательно получим:

$$\Delta U = -\,40 \text{ кДж},\ Q = -\,56 \text{ кДж}.$$

<u>Задача 5</u>. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема V_1 до конечного объема V_2. Давление при этом возросло от p_1 до p_2. Начальная температура гелия была T_1. Найти теплоемкость C всей массы гелия, работу, совершенную гелием в процессе сжатия, и количество теплоты, полученное гелием в процессе сжатия.

$V_1,\ V_2$
$p_1,\ p_2$
T_1

$C,\ Q,\ A$ – ?

Для определения теплоемкости необходимо найти показатель политропы n:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n\,, \tag{1}$$

откуда

$$n = \frac{\ln\left(p_2 / p_1\right)}{\ln\left(V_1 / V_2\right)}\,. \tag{2}$$

Но с другой стороны:

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}\,. \tag{3}$$

Решая уравнение (3) относительно C и учитывая, что:

$$C_V = \frac{m}{\mu}\frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p = \frac{m}{\mu}\frac{\gamma R}{\gamma - 1},$$

получим:

$$C = \frac{m}{\mu}\frac{(n-\gamma)R}{(n-1)(\gamma-1)}, \tag{4}$$

здесь γ – показатель адиабаты, для кислорода $\gamma = 7/5$. Количество вещества m/μ найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V_1}{R T_1}\,. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) найдем:

$$C = \frac{p_1 V_1 (n-\gamma)}{T_1 (n-1)(\gamma - 1)}\,. \tag{6}$$

Работа по определению:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} p dV \,. \qquad (7)$$

Учитывая, что процесс политропический, выразим $p = \frac{p_1 V_1^n}{V^n}$ и, подставляя его в (7) , найдем

$$A = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (8)$$

Количество теплоты, полученное системой, определяется выражением:

$$Q = C(T_2 - T_1), \qquad (9)$$

здесь C – теплоемкость всей массы гелия, определяемая соотношением (6). Конечную температуру T_2 найдем из уравнения Клапейрона:

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 \,. \qquad (10)$$

Подставляя (6) и (10) в (9) получим:

$$Q = \frac{p_1 V_1 (n-\gamma)}{(n-1)(\gamma-1)}\left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - 1\right). \qquad (11)$$

Выражения (6), (8) и (11) решают поставленную задачу. Показатель политропы n во всех соотношениях определяется выражением (2).

Задача 6. Молярная теплоемкость идеального газа при некотором процессе изменяется по закону $C^{\mu} = \alpha T,$ где α – постоянная величина. Найти уравнение, связывающее параметры p и V в этом процессе.

$C^{\mu} = \alpha T$ $\alpha = const$
$f(p,V)$ – ?

Воспользуемся I началом термодинамики, записанным для одного моля:

$$C^{\mu} dT = C_V^{\mu} dT + pdV, \qquad (1)$$

или

$$\left(\alpha T - \frac{R}{\gamma - 1}\right) dT = \frac{RT}{V} dV.$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем:

$$\frac{\alpha}{R} T + \ln T^{\frac{1}{1-\gamma}} = \ln V + const \,. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) вместо T его значение из уравнения Менделеева–Клапейрона и выполняя элементарные преобразования, получим:

$$pV^{\gamma-1}e^{\frac{\alpha pV}{R^2}(1-\gamma)} = const\,. \qquad (3)$$

Задача 7. Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяют по закону $V=\alpha/T$, где α – постоянная. Найти количество тепла, полученное газом в этом процессе, если его температура испытала приращение ΔT.

γ
ν = 1 моль
$V=\alpha/T$
$\alpha = const$
ΔT
Q – ?

Из зависимости объема от температуры видно, что процесс является политропическим. Найдем показатель политропы. Для этого в выражение, определяющее зависимость объема от температуры, подставим ее значение, найденное из уравнения Менделеева–Клапейрона: $T=pV/R$, тогда получим:

$$pV^2 = const. \qquad (1)$$

Таким образом, показатель политропы n = 2. Воспользовавшись соотношением (3.12), найдем теплоемкость 1 моля рассматриваемого газа:

$$C^{\mu} = \frac{2-\gamma}{\gamma-1}R. \qquad (2)$$

Теперь легко найти количество теплоты, полученное газом:

$$Q = C^{\mu}\Delta T = \frac{2-\gamma}{\gamma-1}R\Delta T. \qquad (3)$$

Задача 8. Идеальный газ, показатель адиабаты которого γ, расширяют так, что сообщаемое газу тепло равно убыли его внутренней энергии. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе и уравнение процесса в параметрах T, V.

γ
$Q = -\Delta U$
C^{μ} – ?,
$f(T,V)$ – ?

Молярную теплоемкость найдем, воспользовавшись соотношениями (3.3) и (3.5) для одного моля:

$$C^{\mu}dT = -C_V^{\mu}dT\,, \qquad (1)$$

отсюда

$$C^{\mu} = -C_V^{\mu} = -\frac{R}{\gamma-1}. \qquad (2)$$

Соотношение (2) показывает, что теплоемкость газа в рассматриваемом процессе постоянна, его уравнение в переменных T, V имеет вид:

$$TV^{n-1} = const\,. \qquad (3)$$

Таким образом, задача сводится к определению показателя политропы:

$$n = \frac{C-C_p}{C-C_V} = \frac{-C_V-C_p}{-2C_V} = \frac{1}{2}(\gamma+1). \qquad (4)$$

Подставляя n из (4) в (3) окончательно найдем:

$$TV^{\frac{1}{2}(\gamma-1)} = const\,. \qquad (5)$$

Задача 9. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость C_V^μ которого известна. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V, если газ совершает процесс по закону $T = T_0 e^{\alpha V}$.

C_V^μ
$T = T_0 e^{\alpha V}$
$T_0 = \text{const}$
$\alpha = \text{const}$

$C^\mu - ?$

Из I начала термодинамики легко получить следующее соотношение для теплоемкости:

$$C^\mu = C_V^\mu + p\left(dV/dT\right). \qquad (1)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо p и $\left(dV/dT\right)$ выразить через V. Комбинируя уравнение Менделеева–Клапейрона для 1 моля и зависимость $T(V)$, данную в задаче, найдем:

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{RT_0}{V} e^{\alpha V}. \qquad (2)$$

Далее:

$$\frac{dV}{dT} = \left(\frac{dT}{dV}\right)^{-1} = \frac{e^{-\alpha V}}{\alpha T_0}\,. \qquad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в соотношение (1) окончательно получим:

$$C^\mu = C_V^\mu + \frac{R}{\alpha V}. \qquad (4)$$

Задачи для контроля

1. Определить удельные теплоемкости c_p^y, c_V^y окиси углерода CO.

2. Некоторый газ при нормальных условиях имеет плотность $\rho = 0{,}09$ кг/м^3. Определить его удельные теплоемкости c_p^y, c_V^y, а также, что это за газ.

3.Какое количество тепла надо сообщить 12 г кислорода, чтобы нагреть его на 50 °С при постоянном давлении?

4.При изотермическом сжатии 2,8 кг окиси углерода (CO) объем его уменьшился в 4 раза. Определить работу сжатия, если температура газа 7 °С.

5. При изотермическом расширении 1,2 кг азота было сообщено 1200 кДж тепла. Определить, как изменилось давление азота, если его температура была 7 °С.

6. 200 г азота нагревают при постоянном давлении от 20 °С до 100 °С. Какое количество теплоты поглощается при этом? Каков прирост внутренней энергии газа? Какую внешнюю работу производят силы давления газа?

7. Баллон емкостью 10 л с кислородом при давлении p = 1 атм. и температуре 7 °С нагревается до 15 °С. Какое количество теплоты поглощается при этом газом?

8. При сжатии азота при постоянном давлении совершается работа 12 кДж. Определить изменение внутренней энергии и затраченное тепло.

9. В начале некоторого политропического процесса давление и объем определенной массы кислорода были равны 1 атм. и 2,3 л, а в конце процесса 0,5 атм. и 4,1 л соответственно. Температура в начале процесса была равна 20 °С. Определить:

а) работу, произведенную расширяющимся кислородом;

б) количество тепла, полученное кислородом.

10. Кислород, взятый при температуре 0 °С, расширяется по закону $pV^{0,9}$ = const. Определить удельное количество теплоты и удельную термодинамическую работу, если давление меняется так, что $p_2/p_1 = 0{,}5$. Удельную теплоемкость газа при постоянном давлении считать постоянной и равной $c_p^у$ = 910 Дж/кг·К.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти молярную теплоемкость идеального газа при политропическом процессе pV^n = const, если показатель адиабаты газа равен γ. При каких значениях показателя политропы n теплоемкость газа будет отрицательной?

Ответ: $C_n = R(n-\gamma)/(n-1)(\gamma-1)$; $C_n < 0$ при $1 < n < \gamma$.

2. При некотором политропическом процессе объем аргона был увеличен в α = 4,0 раза. Давление при этом уменьшилось в β = 8,0 раза. Найти молярную теплоемкость аргона в этом процессе, считая газ идеальным.

Ответ: $C = C_V(n-\gamma)/(n-1) = -4{,}2$ Дж/(К·моль), где $n = \ln\beta/\ln\alpha$.

3. Один моль аргона расширили по политропе с показателем n = 1,50. При этом температура газа испытала приращение ΔT = – 26 К. Найти:

а) количество полученного газом тепла;

б) работу, совершенную газом.

Ответ: а) $Q = C_V(n-\gamma)\Delta T/(n-1) = 0{,}11$ кДж;

б) $A = -R\Delta T/(n-1) = 0{,}43$ кДж.

4. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили по закону $p = \alpha V$, где α – постоянная. Первоначальный объем газа V_0. В результате расширения объем увеличился в η раз. Найти:

а) приращение внутренней энергии;

б) работу, совершенную газом;

в) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Ответ: а) $\Delta U = \alpha V_0^2(\eta^2 - 1)/(\gamma - 1)$; б) $A = (1/2)\alpha V_0^2(\eta^2 - 1)$; в) $C^{\mu} = C_V^{\mu} + R/2$.

5. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его давление $p \sim T^{\alpha}$, где α – постоянная. Найти:

а) работу, которую произведет газ, если его температура испытает приращение ΔT;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе; при каком значении α теплоемкость будет отрицательна?

Ответ: а) $A = (1\text{-}\,\alpha)R\Delta T$ б) $C^{\mu} = C_V^{\mu} + R(1 - \alpha)$; $C^{\mu} < 0$ при $\alpha > \gamma/(\gamma - 1)$.

6. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его внутренняя энергия $U \sim V^{\alpha}$, где α – постоянная. Найти:

а) работу, которую произведет газ, чтобы внутренняя энергия испытала приращение ΔU;

б) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Ответ: а) $A = \Delta U(\gamma - 1)/\alpha$; б) $C^{\mu} = C_V^{\mu} + R/\alpha$.

7. Имеется идеальный газ с показателем адиабаты γ. Его молярная теплоемкость при некотором процессе изменятся по закону $C^{\mu} = \alpha/T$, где α – постоянная. Найти:

а) работу, совершенную одним молем газа при его нагревании от T_0 до температуры в η раз большей;

б) уравнение процесса в параметрах p, V.

Ответ: а) $A = \alpha \ln \eta - RT_0(\eta - 1)/(\gamma - 1)$;

б) $pV^{\gamma} \exp\left[\alpha(\gamma - 1)/pV\right] = const$.

4. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ЭНТРОПИЯ

Работа, совершаемая газом в результате выполнения циклического процесса, есть:

$$A = Q_1 - Q_2\,, \tag{4.1}$$

где $Q_1 = \sum_i Q_i$ – сумма всех количеств теплоты, полученных от нагревателя;

$Q_2 = \sum_j Q_j$ – сумма всех количеств теплоты, отданных холодильнику.

Коэффициент полезного действия (кпд) тепловой машины, работающей по замкнутому обратимому циклу:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \sum_K Q_K \Big/ Q_1\,, \tag{4.2}$$

здесь $\sum_K Q_K$ – сумма всех количеств теплоты, полученных рабочим телом на всех участках цикла (т. е. и от холодильника и от нагревателя), она равна работе за цикл.

Кпд машины работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}\,, \tag{4.3}$$

T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

Количество теплоты, получаемое v молями идеального газа в различных процессах:

а) изохорный: $$Q = vC_V^{\mu}(T_2 - T_1)\,, \tag{4.4а}$$

б) изобарный: $$Q = vC_p^{\mu}(T_2 - T_1)\,, \tag{4.4б}$$

в) изотермический: $$Q = vRT\ln(V_2/V_1) = vRT\ln(p_1/p_2)\,, \tag{4.4в}$$

г) политропический: $$Q = vC(T_2 - T_1)\,, \tag{4.4г}$$

д) адиабатный: $$Q = 0\,. \tag{4.4д}$$

Приращение энтропии есть:

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{T}\,. \tag{4.5}$$

Знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства – к необратимым процессам.

Воспользовавшись I началом термодинамики для обратимых процессов, можно получить:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = vC_V^{\mu}\ln(T_2/T_1) + vR\ln(V_2/V_1) \tag{4.6}$$

Примеры решения задач

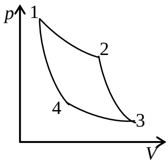


Рис. 4.1

Задача 1. Рассчитать параметры состояния одного моля кислорода в начале и конце процесса адиабатического расширения в цикле Карно, если температура нагревателя и холодильника соответственно равны T_1 и T_2. Давление в начальной точке адиабаты p_2. Чему равна работа, совершаемая газом при расширении?

Дано	
$\nu = 1$ моль T_1, T_2, p_2.	
$V_2 - ?$ $V_3 - ?$ $p_3 - ?$ $A_{23} - ?$	

Интересующий нас участок 2–3 есть адиабата. Давление и температура в точке 2 известны, можем найти объем:

$$p_2 V_2 = RT_1 \Rightarrow V_2 = \frac{RT_1}{p_2}. \qquad (1)$$

В точке 3 известна только температура T_2, воспользовавшись уравнением адиабаты в переменных T, V найдем объем в точке 3:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$

откуда:

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (2)$$

Теперь можно найти давление, воспользовавшись уравнением адиабаты в переменных p, T.

$$p_3 = p_2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) γ – показатель адиабаты, для кислорода $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$ т. к. $i = 5$.

Работу на участке 2–3 найдем, воспользовавшись I началом термодинамики для адиабатического процесса:

$$A = -\Delta U = C_V^{\mu}\left(T_1 - T_2\right) = \frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right). \qquad (4)$$

Задача 2. Цикл, совершаемый одним молем идеального двухатомного газа, состоит из двух изохор и двух изобар. Найти совершаемую газом работу A и кпд цикла. Известно, что в пределах цикла максимальные значения давления и объема газа в три раза больше минимальных значений, равных $p_{\min} = 2{,}0$ атм., и $V_{\min} = 1$ м^3.

$\nu = 1$ моль $i = 5$ $p_{\min} = 2{,}0$ атм $=$ $2{,}02\cdot10^5$ Па $V_{\min} = 1$ м^3 $p_{\max} = 3p_{\min}$ $V_{\max} = 3V_{\min}$	Работу, совершенную газом, найдем как площадь цикла (см. рис. 4.2): $$A = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1). \quad (1)$$ Учитывая, что $p_2 = p_{\max}$, $p_1 = p_{\min}$, $V_4 = V_{\max}$, $V_1 = V_{\min}$, получим $$A = 4p_{\min}V_{\min} = 0{,}808 \text{ МДж}. \quad (2)$$
A – ? η – ?	

Для определения кпд воспользуемся формулой (4.2). Найдем Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя. Прежде всего, необходимо определить, на каких участках цикла рабочее тело находится в контакте с нагревателем, а на каких – с холодильником.

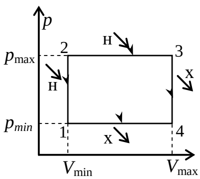


Рис. 4.2

Рассмотрим участок 1–2, здесь происходит процесс изохорического роста давления, а, следовательно, и повышения температуры и, в соответствии с законом Джоуля, увеличение внутренней энергии. Значит, рабочее тело получает энергию от внешнего источника, т. е. находится в контакте с нагревателем. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что на участке 2–3 также контакт с нагревателем, а на участках 3–4 и 4–1 – с холодильником.

Таким образом

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}. \quad (3)$$

Определим Q_{12} и Q_{23}. Как было указано на участке 1–2 идет процесс изохорного нагрева. Используя соотношение (4.4а) и уравнение Менделеева–Клапейрона, запишем:

$$Q_{12} = \frac{C_V^{\mu}}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{i}{2}2p_{\min}V_{\min}. \quad (4)$$

Комбинируя (4.4 б) и уравнение Менделеева–Клапейрона, найдем:

$$Q_{23} = \frac{C_p^{\mu}}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{i+2}{2}6p_{\min}V_{\min}. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3) получим:

$$Q_1 = (4i + 6)p_{\min}V_{\min}. \quad (6)$$

Подставляя (2) и (6) в выражение (4.2) для коэффициента полезного действия окончательно будем иметь:

$$\eta = \frac{4}{4i+6} \approx 0{,}154\,. \tag{7}$$

Коэффициент полезного действия рассматриваемого двигателя составляет 15,4 %, т. е. получился физически разумный результат.

<u>Задача 3.</u> Цикл, совершаемый идеальным двухатомным газом, состоит из двух изохор и двух адиабат. Найти его кпд, если в пределах цикла объем изменяется в *n* раз.

γ

$\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = n$

$\eta - ?$

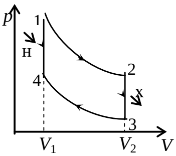


Рис. 4.3

Как и в предыдущей задаче, выясним, прежде всего, где газ получает теплоту, а где –отдает. По условию участки 1–2 и 3–4 – адиабатические, т. е. рабочее тело на них теплоизолировано. Анализ, аналогичный проведенному в задаче 2, приводит к выводу о том, что на участке 1–2 рабочее тело находится в контакте с нагревателем, а на 2–3 – с холодильником.

$$Q_1 = Q_{41} = \nu C_V^{\mu}\left(T_1 - T_4\right) = \nu C_V^{\mu} T_1\left(1 - T_4/T_1\right), \tag{1}$$

$$Q_2 = -Q_{23} = \nu C_V^{\mu}\left(T_2 - T_3\right) = \nu C_V^{\mu} T_2\left(1 - T_3/T_2\right). \tag{2}$$

Воспользовавшись соотношением (4.2) запишем:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}\frac{(1 - T_3/T_2)}{(1 - T_4/T_1)}\,. \tag{3}$$

Теперь необходимо найти отношение температур, входящих в (3). Для этого воспользуемся тем, что точки 1 и 2 лежат на одной адиабате, а 3 и 4 на второй:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \tag{4}$$

$$T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}. \tag{5}$$

Из соотношения (4) сразу получим:

$$T_2/T_1 = \left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = n^{1-\gamma}\,. \tag{6}$$

Разделив почленно (5) на (4) найдем:

$$T_4/T_1 = T_3/T_2\,. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (3), окончательно будем иметь:

$$\eta = 1 - n^{1-\gamma}\,. \tag{8}$$

<u>Задача 4.</u> Цикл, совершаемый двумя киломолями одноатомного идеального газа, состоит из изотермы, изобары и изохоры. Максимальный объем в два раза больше минимального, изотермический процесс протекает при максималь-

ной температуре T_{max} = 600 К. Найти количество теплоты, полученное от нагревателя; работу, совершенную рабочим телом за весь цикл и его кпд.

$\gamma = 5/3$
$\nu = 2\cdot10^3$ моль
T_{max}= 600 К
$\dfrac{V_{max}}{V_{min}} = n = 2$

Q_1 – ? A – ?
η – ?

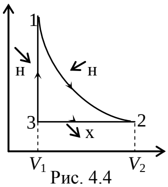


Рис. 4.4

Поскольку изотермический процесс происходит при максимальной температуре, цикл имеет вид, изображенный на рис. 4.4.

Определим, на каких участках рабочее тело находится в контакте с нагревателем, а на каких – с холодильником.

На участке 1–2 происходит изотермическое расширение. Газ совершает работу при неизменной внутренней энергии. В соответствии с I началом термодинамики эта работа может быть совершена только за счет внешнего источника, значит, на этом участке рабочее тело находится в контакте с нагревателем. На участке 2–3 имеем процесс изобарного сжатия: при неизменном давлении уменьшается объем, т. е. понижается температура (масса рабочего тела не изменяется), над газом совершается работа, и в соответствии с I началом термодинамики газ должен отдавать некоторое количество теплоты. Следовательно, на участке 2–3 – контакт с холодильником. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о том, что на участке 3–1 – контакт с нагревателем.

Таким образом

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{31}, \qquad (1)$$

$$Q_2 = -Q_{23}, \qquad (2)$$

здесь Q_{12}, Q_{31}, Q_{23} – количества теплоты, полученные газом на соответствующих участках цикла. Определим их, используя соотношения (4.4а, 4.4б, 4.4в):

$$Q_{12} = \nu R T_1 \ln(V_2/V_1), \qquad (3)$$

$$Q_{23} = \nu C_p^{\mu}(T_3 - T_2) = \nu C_p^{\mu} T_1 (T_3/T_1 - 1), \qquad (4)$$

$$Q_{31} = \nu C_V^{\mu}(T_1 - T_3) = \nu C_V^{\mu} T_1 (1 - T_3/T_1), \qquad (5)$$

здесь $C_V^{\mu} = \dfrac{R}{\gamma - 1}$; $C_p^{\mu} = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$; $T_1 = T_2 = T_{max}$, $V_1 = V_{min}$, $V_2 = V_{max}$.

Теперь необходимо определить отношение T_3/T_1. Для этого воспользуемся уравнением изобары. Учитывая, что $V_3 = V_{min}$, запишем

$$\frac{T_1}{V_{max}} = \frac{T_3}{V_{min}} \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \frac{V_{min}}{V_{max}} = \frac{1}{n}. \qquad (6)$$

Комбинируя написанные соотношения (1) – (6) получим:

$$Q_1 = \nu RT_{\max} \ln n + \nu \frac{R}{\gamma - 1} T_{\max} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \tag{7}$$

$$Q_2 = \nu \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_{\max} \left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Работа, совершенная газом в соответствии с (4.1), есть:

$$A = Q_1 - Q_2 = \nu RT_{\max} \left(\ln n - \frac{n-1}{n}\right). \tag{9}$$

Кпд найдем, используя (4.2):

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n(\gamma - 1)\ln n + (n-1)}. \tag{10}$$

Соотношения (7), (9) и (10) решают задачу в общем виде. Подставляя численные значения, найдем:

Q_1 = 1,44·10^7 Дж; A = 1,93·10^6 Дж; η = 0,323.

Задача 5. Цикл состоит из изобары, адиабаты и изотермы. Изотермический процесс проходит при минимальной температуре цикла, а давление в его пределах меняется в n раз. Найти кпд цикла, если рабочим телом является одноатомный идеальный газ.

γ

$\dfrac{p_{\max}}{p_{\min}} = n$

$\eta - ?$

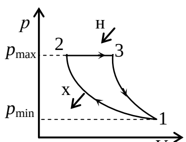


Рис. 4.5

Рассуждая как в предыдущих задачах, легко выяснить, что на изотермическом участке 1–2 рабочее тело находится в контакте с холодильником, на 2–3 – с нагревателем и 3–1 –теплоизолировано (3–1 – адиабатический процесс). Следовательно:

$$Q_1 = Q_{23} = \nu C_p^{\mu}(T_3 - T_2) = \nu C_p^{\mu} T_{\min}(T_3/T_{\min} - 1), \tag{1}$$

$$-Q_2 = Q_{12} = \nu RT_{\min} \ln \frac{p_1}{p_2} = -\nu RT_{\min} \ln n. \tag{2}$$

Чтобы воспользоваться формулой (4.2) для кпд, необходимо найти отношение $T_3/T_{\min}$. Точки 3 и 1 лежат на адиабате, воспользуемся уравнением адиабатического процесса в переменных p, T:

$$T_3 p_{\max}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{\min} p_{\min}^{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

отсюда

$$\frac{T_3}{T_{\min}} = \left(\frac{p_{\min}}{p_{\max}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{3}$$

Подставляя (1), (2) и (3) в формулу (4.2), окончательно найдем:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(\gamma - 1)\ln n}{\gamma\left(n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}. \qquad (4)$$

Задача 6. Найти приращение энтропии одного моля углекислого газа при увеличении его температуры в 2 раза, если процесс нагревания изобарический. Газ считать идеальным.

$\nu = 1$ моль
$\gamma = 4/3$
$\frac{T_2}{T_1} = n = 2$
$\Delta S - ?$

Для определения приращения энтропии воспользуемся формулой (4.5). Учитывая, что процесс изобарический, будем иметь:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p^{\mu} dT}{T} = C_p^{\mu} \ln \frac{T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

здесь $C_p^{\mu} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, тогда:

$$\Delta S = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln 2 = 23\left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\right). \qquad (2)$$

Задача 7. Два моля идеального газа сначала изохорически охладили, а затем изобарически расширили так, что температура газа стала равна первоначальной. Найти приращение энтропии газа, если его давление в этом процессе изменилось в $n = 3{,}3$ раза.

$\nu = 2$ моль
$T_н = T_к$
$\frac{p_н}{p_к} = n = 3{,}3$
$\Delta S - ?$

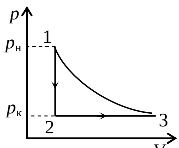


Рис. 4.6

Изобразим графически процессы, протекающие в газе. Чтобы определить конечное состояние газа, проведем через точку 1, изображающую начальное состояние газа, изотерму, ее пересечение с изобарой дает конечное состояние – точку 3. Промежуточное состояние – точка 2 – лежит на изохоре, проходящей через начальное состояние, причем так, чтобы обеспечить требуемое изменение давления.

Пользуясь аддитивностью энтропии можно найти ее приращение сначала на участке 1–2, затем на 2–3, и полученные результаты сложить. Но можно поступить и иначе. Воспользовавшись тем, что энтропия является функцией состояния, т. е. ее приращение не зависит от пути перехода между заданными состояниями, перейдем из начального состояния (1) в конечное (3) по изотерме:

$$\Delta S = \int\limits_{(1)}^{(3)} \frac{dQ_{изот}}{T} = \int\limits_{(1)}^{(3)} \frac{p}{T} dV \ , \tag{1}$$

здесь мы учли, что в изотермическом процессе $dQ = pdV$. Выразим давление из уравнения Менделеева–Клапейрона $p = \nu RT/V$ и подставим в (1)

$$\Delta S = \nu R \int\limits_{V_н}^{V_к} \frac{dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_к}{V_н} = \nu R \ln \frac{p_н}{p_к} = \nu R \ln n \ . \tag{2}$$

Подставляя численные значения, получим:

$\Delta S = 19{,}8\,Дж/К$.

<u>Задача 8</u>. Один моль идеального газа совершает процесс, при котором энтропия газа изменяется с температурой T по закону $S = aT + C_V^{\mu} \ln T,$ где a – положительная постоянная, C_V^{μ} – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Найти, как зависит температура газа от его объема в этом процессе, если при $V = V_0$ температура была $T = T_0$.

$\nu = 1$ моль
$S = aT + C_V^{\mu} \ln T$
$a = \mathrm{const} > 0$
V_0, T_0.
$T(V)$ – ?

Выразим бесконечно малое приращение энтропии из ее определения и зависимости данной в задаче:

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_V^{\mu} \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \ , \tag{1}$$

$$dS = adT + C_V^{\mu} \frac{dT}{T} \ . \tag{2}$$

Приравнивая правые части (1) и (2) и выражая давление из уравнения состояния, найдем:

$$R \frac{dV}{V} = adT \ . \tag{3}$$

Интегрируя (3) с учетом начальных условий, будем иметь:

$$R \int\limits_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = a \int\limits_{T_0}^{T} dT \ .$$

Или, после простых преобразований

$$T = T_0 + \frac{R}{a} \ln \frac{V}{V_0} \ . \tag{4}$$

Задачи для контроля

1. Рассчитать параметры состояния кислорода в начале и конце процесса адиабатического расширения в цикле Карно, если температуры нагревателя

и холодильника равны соответственно $T_1 = 900$ К и $T_2 = 280$ К, давление в начальной точке адиабаты $p_2 = 1$ атм. Найти работу, совершаемую газом на этом участке.

2. Определить параметры состояния идеального газа в точках 1 и 2 цикла Карно, если $p_1 = 10^5$ Н/м^2, $T_1 = 900$ К. Рабочее тело получает от нагревателя $Q_1 = 1{,}75 \cdot 10^6$ Дж. Участок 1 и 2 – изотерма расширения.

3. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре 0 °С кипятильнику с водой при температуре 100 °С. Какое количество воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 2 кг воды в кипятильнике?

4. Цикл, совершаемый идеальным двухатомным газом, состоит из двух изобар и двух адиабат. Найти кпд цикла, если известно, что давление газа в пределах цикла увеличивается в два раза.

5. Цикл, совершаемый двумя киломолями одноатомного идеального газа, состоит из изотермы, изохоры и изобары. Известно, что максимальный объем в два раза больше минимального и что изотермический процесс совершается при минимальной температуре цикла $T_{\min} = 400$ К. Найти количество теплоты, полученное от нагревателя рабочим телом и совершенную им работу за весь цикл.

6. Цикл, совершаемый одним киломолем идеального двухатомного газа, состоит из двух изохор и двух изобар. Найти совершаемую газом работу A и кпд цикла. Известно, что в пределах цикла максимальные значения объема и давления газа в два раза больше минимальных значений, равных $p_{\min}= 1{,}0$ атм. и $V_{\min}= 0{,}50$ м^3.

7. Цикл, совершаемый двумя киломолями идеального двухатомного газа, состоит из изотермы, изохоры и изобары. Объем газа в пределах цикла изменяется в 2 раза, изотермический процесс протекает при минимальной температуре цикла. Найти кпд этого цикла.

8. Цикл состоит из изотермы, адиабаты и изохоры. Изотермический процесс проходит при максимальной температуре, давление в пределах цикла меняется в n раз. Найти кпд цикла. Рабочим веществом является двухатомный идеальный газ.

9. Цикл, совершаемый одноатомным идеальным газом, состоит из изотермы, адиабаты и изобары. Изотермический процесс совершается при максимальной температуре цикла, а объем в пределах цикла меняется в 2 раза. Найти кпд цикла.

10. Приводимые в тепловой контакт одинаковые массы вещества имеют разные температуры T_1 и T_2. Считая, что $C_P = const$, найти приращение энтропии в результате установления теплового равновесия при p = const.

11. В некотором процессе температура вещества зависит от его энтропии по закону $T \sim S^n$, где n – постоянная. Найти соответствующую теплоемкость C вещества как функцию S.

Задачи для самостоятельного решения

1. Водород совершает цикл Карно. Найти кпд цикла, если при адиабатическом расширении:

а) объем газа увеличивается в n = 2,0 раза;

б) давление уменьшается в n = 2,0 раза.

Ответ: а) $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 0{,}25$; б) $\eta = 1 - n^{1/\gamma - 1} = 0{,}18$.

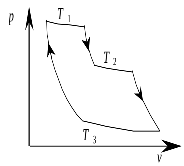


Рис. 4.6

2. Идеальный газ совершил цикл, состоящий из чередующихся изотерм и адиабат (рис. 4.6). Температуры, при которых происходят изотермические процессы, равны T_1, T_2 и T_3. Найти кпд такого цикла, если при каждом изотермическом расширении объем газа увеличивается в одно и то же число раз.

Ответ: $\eta = 1 - 2T_3/(T_1 + T_2)$.

3. Найти кпд цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат, если в пределах цикла давление изменяется в n =10 раз. Рабочим веществом является азот.

Ответ: $\eta = 1 - n^{1-\gamma}$ = 60 %.

4. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Найти кпд такого цикла, если температура T газа возрастает в n раз, как при изохорическом нагреве, так и при изобарическом расширении.

Ответ: $\eta = 1 - (n + \gamma)/(1 + \gamma n)$.

5. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из:

а) изохоры, адиабаты и изотермы; б) изобары, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс происходит при *минимальной* температуре цикла. Найти кпд каждого цикла, если температура T в его пределах изменяется в n раз.

Ответ: В обоих случаях $\eta = 1 - (\ln n)/(n - 1)$.

6. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермы политропы и адиабаты, причем изотермический процесс происходит при *максимальной* температуре цикла. Найти кпд такого цикла, если температура T в его пределах изменяется в n раз.

Ответ: $\eta = 1 - (n - 1)/n \ln n$.

7. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает прямой цикл, состоящий из адиабаты, изобары и изохоры. Найти кпд цикла, если при адиабатическом процессе объем идеального газа:

а) увеличивается в n раз; б) уменьшается в n раз.

Ответ: а) $\eta = 1 - \gamma\,(n - 1)/(n^{\gamma} - 1)$; б) $\eta = 1 - (n^{\gamma} - 1)/\gamma(n - 1)n^{\gamma - 1}$.

8. Во сколько раз следует увеличить изотермически объем идеального газа в количестве $\nu = 4{,}0$ моля, чтобы его энтропия испытала приращение $\Delta S = 23$ Дж/К?

Ответ: $n = \exp(\Delta S/\nu R) = 2{,}0$.

9. Идеальный газ с показателем адиабаты γ совершает процесс по закону $p = p_0 - \alpha V$, где p_0 и α – положительные постоянные, V – объем. При каком значении объема энтропия газа окажется максимальной?

Ответ: $V_m = \gamma p_0/\alpha(1 + \gamma)$.

5. РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. ГАЗ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Реальным газом называется газ, между молекулами которого действуют силы межмолекулярного взаимодействия. Газом Ван-дер-Ваальса называется такая модель реального газа, в которой молекулы рассматриваются как абсолютно твердые шарики с диаметром d, между которыми действуют силы взаимного притяжения. Конечные размеры шариков означают, что принимаются во внимание и силы отталкивания между молекулами реального газа. Уравнение Ван-дер-Ваальса, которое описывает состояние газа Ван-дер-Ваальса, отличается от уравнения Менделеева–Клапейрона введением поправок a и $в$. Для одного моля газа оно имеет вид:

$$\left(p+\frac{a}{V_\mu^2}\right)\left(V_\mu - в\right)= RT. \tag{5.1}$$

Поправки a и $в$ для каждого газа находятся экспериментально. Их численные значения приведены в таблицах.

Внутренняя энергия в этой модели зависит уже не только от температуры, но и от объема. Для одного моля:

$$U_\mu = C_V^\mu T-\frac{a}{V_\mu}. \tag{5.2}$$

Бесконечно малое приращение энтропии 1 моля газа Ван-дер-Ваальса в обратимом процессе:

$$dS=\frac{\delta Q}{T}=\frac{1}{T}\left(dU_\mu + pdV_\mu\right)=C_V^\mu\frac{dT}{T}+R\frac{dV_\mu}{V_\mu - b}. \tag{5.3}$$

Изотермы, полученные из уравнения Ван-дер-Ваальса, сопоставленные с полученными экспериментально изотермами реального газа, позволяют описывать газ, жидкость того же химического состава и двухфазную систему – газ в равновесии с собственной жидкостью (насыщенный пар), а также неустойчивые (метастабильные) состояния: перегретую жидкость и пересыщенный пар. Двухфазное состояние возможно при температуре ниже критической $T_к$. На изотерме $T = T_к$ существует точка перегиба (критическая точка), в которой $\frac{dp}{dV}=0$. Ей соответствует критическое состояние вещества. Его можно достичь экспериментально и измерить соответствующие критические параметры: $T_к$, $p_к$, $V_к$, которые связаны между собой уравнением:

$$p_к V_к=\frac{3}{8}RT_к, \tag{5.4}$$

а с ван-дер-ваальсовыми поправками – соотношениями:

$$V_к = 3в; \quad p_к = \frac{a}{27в^2}; \quad T_к = \frac{8a}{27Rв}. \tag{5.5}$$

Введя безразмерные параметры состояния: давление $\pi = p/p_к$, объем $\omega = V/V_к$, температуру $\tau = T/T_к$, получаем приведенное уравнение состояния, не зависящее от вида газа:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau. \tag{5.6}$$

Однородное вещество может распадаться на фазы. Примерами фаз могут служить агрегатные состояния: твердое, жидкое, газообразное. При произвольных условиях (т. е. произвольных значениях давления и температуры) устойчива лишь одна из фаз: вещество переходит в нее в результате фазового перехода. Переходы из одного агрегатного состояния в другое – это примеры фазовых переходов 1 рода, при которых поглощается или выделяется теплота, а удельные объемы фаз различны: $v_1' \neq v_2'$. Количество теплоты, необходимое для перехода единицы массы вещества из первой фазы во вторую, называется удельной теплотой фазового перехода q_{12}. Тогда для всей массы m выделенное (поглощенное) количество теплоты:

$$Q_{12} = q_{12} m. \tag{5.7}$$

Равновесное сосуществование двух фаз возможно только при определенных условиях, когда давление p и температура T связаны между собой уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(v_2' - v_1')}, \tag{5.8}$$

где q_{12} – удельная теплота перехода из фазы с удельным объемом v_1' в фазу с удельным объемом v_2', q_{12} – величина алгебраическая. В результате интегрирования (5.8) можно получить на координатной плоскости p, T кривые фазовых равновесий: возгонки, плавления, испарения. Их единственная общая точка соответствует равновесию всех трех фаз и называется тройной точкой.

Примеры решения задач

Задача 1. Получить для ван-дер-ваальсовского газа уравнение адиабаты в переменных V, T, а также в переменных p, V. Сравнить полученные уравнения с аналогичными уравнениями для идеального газа.

$\delta Q = 0$
$f(V, T)$ –?
$f(p, V,)$ –?

Рассмотрим 1 моль газа. Для бесконечно малого адиабатического процесса, согласно первому началу термодинамики:

$$\delta Q = dU + pdV = 0. \tag{1}$$

Из уравнения Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mu}^{2}}\right)\left(V_{\mu}-в\right)=RT, \qquad (2)$$

выразим давление

$$p=\frac{RT}{V_{\mu}-в}-\frac{a}{V_{\mu}^{2}}. \qquad (3)$$

Дифференцируя выражение для внутренней энергии (5.2), получим:

$$dU=C_{V}^{\mu}dT+\frac{a}{V_{\mu}^{2}}dV. \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1), после преобразований получаем:

$$C_{V}^{\mu}dT+\frac{RT}{V-в}dV=0. \qquad (5)$$

Деля обе части этого уравнения на $C_{V}^{\mu}T,$ запишем:

$$\frac{dT}{T}+\frac{R}{C_{V}^{\mu}}\frac{dV}{V-в}=0, \qquad (6)$$

откуда следует:

$$T\left(V-в\right)^{R/C_{V}^{\mu}}=const. \qquad (7)$$

Это и есть уравнение адиабаты в переменных *V, T*. Заменяя в нем *T* согласно уравнению Ван-дер-Ваальса, получаем:

$$\frac{1}{R}\left(p+\frac{a}{V_{\mu}^{2}}\right)\left(V-в\right)\left(V-в\right)^{R/C_{V}^{\mu}}=const$$

или

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mu}^{2}}\right)\left(V-в\right)^{1+R/C_{V}^{\mu}}=const. \qquad (8)$$

Так выглядит уравнение адиабаты в переменных *V, p* (в его правой части – уже другая константа).

Если поправками *а* и *в* можно пренебречь, т. е. считать газ идеальным, для которого показатель степени можно преобразовать к виду:

$$1+\frac{R}{C_{V}^{\mu}}=\frac{C_{V}^{\mu}+R}{C_{V}^{\mu}}=\frac{C_{p}^{\mu}}{C_{V}^{\mu}}=\gamma,$$

то уравнение (8) упрощается и принимает вид:

$$pV_{\mu}^{\gamma}=const.$$

Это известное уравнение Пуассона, описывающее адиабатический процесс в идеальном газе.

Для реального газа показатель степени $1+R/C_V^{\mu}$ нельзя заменить на $\gamma=\dfrac{C_p^{\mu}}{C_V^{\mu}}$, так как $C_p^{\mu}\neq C_V^{\mu}+R$, т. е. уравнение Майера не выполняется.

Задача 2. Кислород находится в критическом состоянии при $T_к$ = 154,3 К, $p_к$ = 51,4 атм. Вычислить приращение давления при увеличении температуры на 10 К при постоянном объеме.

$p_1 = p_к$ = 51,4 атм $T_1 = T_к$ = 154,3 К $\Delta T = T_2 - T_1$ =10 К
$\Delta p = p_2 - p_1$ –?

Разрешим приведенное уравнение состояния (5.6) относительно безразмерного давления π:

$$\pi=\frac{8\tau}{3\omega-1}-\frac{3}{\omega^2}. \qquad (1)$$

В критическом состоянии $\pi_1=\omega_1=\tau_1=1$. Если безразмерная температура τ увеличивается на величину $\Delta\tau=\Delta T/T_к$ при постоянном объеме, то для π_2 (второе состояние) получим:

$$\pi_2=\frac{8(1+\Delta\tau)}{3\cdot1-1}-\frac{3}{1^2}=1+4\Delta\tau. \qquad (2)$$

Приращение безразмерного давления:

$$\Delta\pi=\pi_2-\pi_1=4\Delta\tau. \qquad (3)$$

В размерном виде:

$$\Delta p=\Delta\pi p_к=4\Delta\tau p_к=4\frac{\Delta T}{T_к}p_к=13{,}3 \text{ атм.}$$

Давление увеличится на 13,3 атм.

Задача 3. Какую часть объема сосуда должен занимать жидкий эфир при комнатной температуре (его плотность ρ при этом равна 0,72 г/см^3), чтобы при достижении критической температуры он оказался в критическом состоянии? Для эфира $T_к$ = 476 К, $p_к$ = 35,5 атм, μ = 74 г/моль.

$T_к$ = 476 К $p_к$ = 35,5 атм μ = 74 г/моль ρ = 0,72 г/см^3 = 0,72·10^3 кг/моль
η – ?

Объем, занимаемый v молями эфира при комнатной температуре, равен:

$$V_1=\frac{v\mu}{\rho}. \qquad (1)$$

При критической температуре объем одного моля выразим из уравнения (5.4), а для v молей получим:

$$V=vV_к=v\frac{3RT_к}{8p_к}. \qquad (2)$$

Именно таким должен быть объем сосуда, в который помещают ν молей эфира, первоначально занимающих только его часть:

$$\eta = \frac{V_1}{V} = \frac{\nu\mu}{\rho}\frac{8p_к}{\nu 3RT_к} = \frac{8\mu p_к}{3\rho RT_к} = 0{,}25.$$

При комнатной температуре эфир должен занимать 0,25 часть объема сосуда.

<u>Задача 4</u>. Насыщенный водяной пар находится в цилиндре под поршнем, при температуре 120°С. При медленном изотермическом сжатии пар начинает конденсироваться. К моменту, когда сконденсировалось m = 5 г пара, объем, им занимаемый, уменьшился на ΔV = 4,5 л. Какая по величине работа была совершена внешней силой в этом процессе? Сколько пара было в цилиндре вначале, если в конце опыта вода занимала 0,5 % объема цилиндра?

μ = 18 г/моль
T = 393 К
$\Delta m_n = m$ = 5 г
ΔV = 4,5 л
$V_ж = 0{,}005V_2$
$\rho_в = 10^3$ г/л
$A_{внеш}$ – ?
m_{n1} – ?

В процессе участвует насыщенный водяной пар, значит, давление его (при постоянной температуре) не меняется и может быть найдено по формуле, полученной из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_н = \frac{\rho RT}{\mu}. \quad (1)$$

Изобарно уменьшая объем системы на ΔV, внешние силы совершают над ней работу:

$$A_{внеш} = p_н\Delta V = \frac{\rho RT}{\mu}\Delta V = \frac{RT}{\mu}\rho\Delta V. \quad (2)$$

Заменяя в этом выражении произведение плотности пара на занимаемый им объем $\rho\Delta V$ массой m сконденсировавшегося пара, получим:

$$A_{внеш} = \frac{RT}{\mu}m \approx 907 \text{ Дж}. \quad (3)$$

Объем воды-конденсата выразим через его массу m и плотность воды $\rho_в$ и свяжем с конечным объемом системы V_2:

$$V_ж = \frac{m}{\rho_в} = 0{,}005V_2, \quad (4)$$

откуда для конечного объема получим:

$$V_2 = \frac{m}{\rho_в \cdot 0{,}005} = \frac{200m}{\rho_в} = 1 \text{ л}. \quad (5)$$

Тогда начальный объем $V_1 = V_2 + \Delta V$, а масса водяного пара в нем:

$$m_{п1} = \rho V_1 = \rho\left(V_2 + \Delta V\right) = \rho \Delta V\left(\frac{V_2}{\Delta V} + 1\right). \quad (6)$$

Так как $\rho\Delta V = m$, то для начальной массы пара получим:

$$m_{п1} = m\left(\frac{V_2}{\Delta V} + 1\right) \approx 6{,}1 \text{ г.}$$

Работа внешней силы $A_{внеш} \approx 907$ Дж, начальная масса пара $m_{п1} \approx 6{,}1$ г.

Задача 5. В закрытом сосуде находится небольшое количество воды и ее насыщенный пар при температуре t = 100°C. На сколько процентов увеличится масса насыщенного пара при повышении температуры системы на ΔT = 1,5 К? Пар считать идеальным газом и удельный объем воды пренебрежимо малым по сравнению с удельным объемом пара.

μ = 18г/моль
T = 373 К
ΔT = 1,5 К
q_{12}= $2{,}25 \cdot 10^3$ Дж/г

$\dfrac{\Delta m}{m}$ – ?

Масса пара увеличится из-за увеличения его плотности, которая зависит от давления и температуры:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (1)$$

Проводя логарифмическое дифференцирование, найдем связь между относительным изменением плотности, давления и температуры:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}. \quad (2)$$

Изменение давления равновесной двухфазной системы вода–пар связано с изменением температуры уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T\left(v_2' - v_1'\right)}, \quad (3)$$

из которого получаем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{q_{12}}{p\left(v_2' - v_1'\right)}\frac{dT}{T}. \quad (4)$$

Пренебрегая удельным объемом воды v_1' по сравнению с удельным объемом пара v_2' и выражая последний через плотность: $v_2' = 1/\rho$, получаем:

$$\frac{dp}{p} = \frac{q_{12}}{p v_2'}\frac{dT}{T} = \frac{q_{12}\rho}{p}\frac{dT}{T}. \quad (5)$$

Заменив отношение ρ/p согласно (1) на $\dfrac{\mu}{RT}$, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{q_{12}\mu}{RT}\frac{dT}{T}. \quad (6)$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2), после преобразований будем иметь:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}\left(\frac{q_{12}\mu}{RT} - 1\right). \qquad (7)$$

Масса насыщенного пара равна:

$$m = \rho V. \qquad (8)$$

Получим ее относительное изменение, логарифмически дифференцируя это уравнение:

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V}. \qquad (9)$$

Поскольку объем всей системы не меняется, причем на долю воды приходится незначительная его часть, то постоянен объем пара: $dV = 0$, и относительное изменение его плотности (7):

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}\left(\frac{q_{12}\mu}{RT} - 1\right). \qquad (10)$$

Заменив дифференциалы малыми приращениями, получим окончательно:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta T}{T}\left(\frac{q_{12}\mu}{RT} - 1\right).$$

Подставляя численные значения, будем иметь: $\frac{\Delta m}{m} = 0{,}05$, т. е. масса насыщенного пара увеличится на 5 %.

Задача 6. Вода при соблюдении необходимых предосторожностей может быть переохлаждена при нормальном давлении до $T = 263$ К. Какая часть ее превращается в лед, если в нее бросить кусочек льда и вызвать этим замерзание? Удельная теплоемкость переохлажденной воды $c = 4180$ Дж/кг·К.

$T = 263$ К
$T_{пл} = 273$ К
$c = 4180$ Дж/кг·К
$q = 3{,}34\cdot10^5$ Дж/кг

$\eta = \frac{m_л}{m} - ?$

Метастабильное состояние – переохлажденная вода – неустойчиво. Брошенный кусочек льда служит зародышем твердой фазы, которая образуется при переходе системы в равновесие – к температуре фазового перехода вода–лед (т. е. температуре плавления), равной при нормальном давлении $T_{пл} = 273$ К.

При образовании льда в переохлажденной воде выделяется теплота плавления в количестве q на каждую единицу массы образовавшегося льда. Это тепло идет на нагревание льда и воды. Процесс прекратится, когда выделится количество тепла, достаточное для нагревания системы до температуры плавления. В силу закона сохранения энергии, так как все тепло, в конечном счете, идет только на нагревание, можно считать, что сначала вся вода нагрелась до температуры плавления $T_{пл}$, а потом образовалось необходимое количество льда при температуре $T_{пл}$. На основании уравнения теплового баланса запишем:

$$m_л q = mc\left(T_{пл} - T\right),$$

откуда:

$$\eta = \frac{m_л}{m} = \frac{c\left(T_{пл} - T\right)}{q} = 0{,}125\ .$$

В лед превратится 12,5 % массы воды.

Задачи для контроля

1. Один моль ван-дер-ваальсовского газа, имевший объем V_1 и температуру T_1, переведен в состояние с объемом V_2 и температурой T_2. Найти соответствующее приращение энтропии газа, считая его молярную теплоемкость C_V известной.

2. Найти работу, совершаемую одним молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении его от объема V_1 до V_2 при температуре T.

3. Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом $V = 0{,}250$ *л*. При температуре $T_1 = 300$ К давление газа $p_1 = 90$ атм, а при $T_2 = 350$ К давление $p_2 = 110$ атм. Найти постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

4. Найти удельный объем бензола (C_6H_6) в критическом состоянии, если его критическая температура $T_{кр} = 562$ К и критическое давление $p_{кр} = 47$ атм.

5. Найти удельный объем насыщенного водяного пара при нормальном давлении, если известно, что уменьшение давления на $\Delta p = 3{,}2$ кПа приводит к уменьшению температуры кипения воды на $\Delta T = 0{,}9$ К.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какое количество тепла надо сообщить $\nu = 3{,}0$ молям углекислого газа, чтобы при расширении в вакуум от объема $V_1 = 5{,}0$ *л* до $V_2 = 10$ *л* температура его не изменилась? Газ считать ван-дер-ваальсовским.

Ответ: $Q = \nu^2 a(V_2 - V_1)/\ V_1\ V_2 = 0{,}33$ кДж.

2. Сосуд объемом V делится на две равные части перегородкой с закрытым пробкой отверстием. В одной из половин сосуда содержится моль ван-дер-ваальсовского газа (с известными a, b и C_V), имеющий температуру T. Пробку удаляют, и газ распространяется на весь объем. Считая процесс расширения адиабатическим, определить:

а) приращение внутренней энергии газа $\Delta U_м$;

б) приращение температуры газа ΔT;

в) приращение энтропии газа $\Delta S_м$.

Ответ: а) $\Delta U_м = 0$; б) $\Delta T = -a/VC_v$; в) $\Delta S_м = C_v \ln(1 - a/VTC_v) + R \ln 2(1 + b/(V-2b)) \approx R(\ln 2 + b/V) - a/VT$.

3. Вычислить постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа, если его критическая температура $T_{кр}$ = 304 К и критическое давление $p_{кр}$ = 73 атм.

Ответ: $a = 27 R^2T^2_{кр}/64$, $p_{кр}$ =3,6 атм·л^2/моль^2, $b = RT_{кр}/8 p_{кр}$ = = 0,043 л/моль.

4. Зная постоянные Ван-дер-Ваальса, найти:

а) наибольший объем, который может занимать вода массы m = 1,00 кг в жидком состоянии; б) наибольшее давление насыщенных паров воды.

Ответ: а) $V_{макс} = 3bm/M$ = 5,0 л; б) $p_{макс} = a/27b^2$ =230 атм.

5. Пространство в цилиндре под поршнем, имеющее объем V_0 = 5,0 л, занимает один насыщенный пар, температура которого t = 100 °С. Найти массу жидкой фазы, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема под поршнем до V = 1,6 л. Насыщенный пар считать идеальным газом.

Ответ: $m_ж \approx Mp_0(V_0 - V)/RT$ = 2,0 г, где p_0 – нормальное давление.

6. Найти приращение температуры плавления льда вблизи 0 °С при повышении давления на Δp = 1,00 атм, если удельный объем льда на $\Delta V'$ = = 0,091 см^3/г больше удельного объема воды.

Ответ: $\Delta T = -(T\Delta V'/q)\Delta p$ = – 7,5 мК, где q – удельная теплота плавления льда.

7. Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре 110 °С. Вода занимает при этом 0,1 % объема цилиндра. При медленном изобарическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарится, пар совершит работу величиной A = 177 Дж, а объем, который он занимал, увеличится на ΔV = 1,25 л. Найти давление, при котором производится опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

Ответ: $p = \dfrac{A}{\Delta V} = 1{,}5\,атм$, $m_в = \dfrac{A\mu}{RT} = 1$ г, $m_п = \dfrac{A\mu V}{RT\Delta V} = 0{,}8$ г.

6. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Молекулы поверхностного слоя жидкости обладают дополнительной потенциальной энергией U_s, которая пропорциональна площади S поверхности жидкости

$$U_s = \sigma \cdot S, \tag{6.1}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. Сила поверхностного натяжения направлена по касательной к поверхности жидкости и пропорциональна длине Δl элемента контура, на который она действует

$$\Delta F = \sigma \cdot \Delta l.$$

Если поверхность жидкости искривлена, то давление в жидкости отличается от внешнего давления на величину Δp, которое определяется формулой Лапласа

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \tag{6.2}$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности. Для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$ и

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \tag{6.3}$$

Разность уровней жидкости внутри и снаружи круглого цилиндрического капилляра обратно пропорциональна радиусу капилляра r:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}, \tag{6.4}$$

где θ – краевой угол, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. При смачивании $(0 \le \theta < \pi/2)$ жидкость поднимается в капилляре, а при несмачивании $(\pi/2 < \theta \le \pi)$ – опускается. Капиллярные явления становятся существенными только при малых радиусах трубок, зазорах, щелях и т. п. Т. е. капилляром называется сосуд, характерный размер которого сравним с радиусом кривизны мениска.

Если молекулы газа отличаются друг от друга какой-либо характерной величиной (импульсом, энергией, массой и т. д.) и распределение их по данной величине неоднородно, то вследствие теплового движения наблюдается «перенос» этой величины в пространстве из одного места в другое. Различают три явления переноса: вязкость (перенос импульса), теплопроводность (перенос энергии) и диффузия (перенос массы).

Среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными столкновениями, называют средней длиной свободного пробега.

Средняя длина свободного пробега λ обратно пропорциональна концентрации молекул газа n:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}, \tag{6.5}$$

где $\sigma = \pi d^2$ – площадь эффективного сечения, d – эффективный диаметр молекул.

Все явления переноса подчиняются общим закономерностям:

1. Перенос величины G наблюдается тогда, когда она распределена неоднородно по пространству, т. е. $\nabla G \neq 0$.

2. Поток переносимой величины направлен в сторону ее убывания, т. е. противоположно ∇G.

3. Поток переносимой величины пропорционален ее градиенту: $\vec{j} \sim \nabla G$.

Плотность потока $\vec{j}$ переносимой величины определяется выражением:

$$\vec{j} = -\frac{1}{3} n\lambda \langle v \rangle \nabla G. \tag{6.6}$$

В этом законе отражены все три перечисленных выше признака.

Вязкое трение возникает тогда, когда отдельные слои жидкости или газа движутся с разными средними скоростями друг относительно друга.

Закон вязкого трения Ньютона связывает касательные напряжения τ с градиентом скорости упорядоченного движения

$$\tau = \eta \frac{du}{dx}, \tag{6.7}$$

где $\eta = \frac{1}{3} n\lambda \langle v \rangle m_0$ – коэффициент вязкости, m_0 – масса молекулы, $<v>$ – средняя скорость теплового движения молекул.

Если средние энергии молекул по объему различны, то наблюдается перенос энергии. Это явление называется теплопроводностью и подчиняется закону Фурье:

$$j_T = -\alpha \frac{dT}{dx}, \tag{6.8}$$

где $\alpha = \frac{1}{3} n\lambda \langle v \rangle \frac{C_v^{\mu}}{N_A} = \frac{1}{3} \rho\lambda \langle v \rangle c_v$ – коэффициент теплопроводности.

Диффузия (перенос массы) наблюдается при неоднородном распределении концентрации веществ и описывается законом Фика:

$$j_{n_i} = -D \frac{dn_i}{dx}, \tag{6.9}$$

где $D=\dfrac{1}{3}\lambda\langle v\rangle$ – коэффициент диффузии, n_i – концентрация i-той компоненты в смеси.

Примеры решения задач

Задача 1. Две вертикальные параллельные стеклянные пластинки частично погружены в воду. Расстояние между пластинками d = 0,1 мм, их ширина l = 12 см. Считая, что вода между пластинками не доходит до их верхних краев и что смачивание полное, найти высоту подъема жидкости и силу, с которой притягиваются пластинки.

l = 12см
d = 0,1мм
h, F – ?

Из-за поверхностного натяжения жидкость между пластинками поднимается на высоту h. Свяжем с верхним уровнем жидкости начало координат, ось z направим вертикально вниз (рис. 6.1). Давление жидкости между пластинами на глубине z складывается из атмосферного p_a, лапласового Δp и гидростатического давлений

$$p = p_a - \Delta p + \rho g z\ . \tag{1}$$

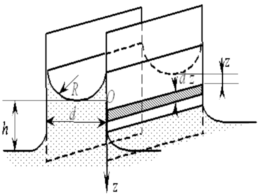


Рис. 6.1

Давление Δp взято со знаком минус потому, что поверхность жидкости вогнутая, силы поверхностного натяжения направлены вверх и растягивают жидкость. Известно, что при равновесии давление жидкости на одном и том же горизонтальном уровне одинаковое. Тогда для уровня $z = h$ можно записать:

$$p_a - \Delta p + \rho g h = p_a\,. \tag{2}$$

Отсюда находим высоту поднятия жидкости

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g}\,. \tag{3}$$

Искривленная поверхность жидкости между пластинами имеет форму полуцилиндра. Для определения главных радиусов кривизны R_1 и R_2 проведем два взаимно перпендикулярных сечения: одно параллельно пластинам, а другое – перпендикулярно. Первое сечение дает образующую цилиндрической поверхности (прямую линию), радиус кривизны которой $R_1 = \infty$. Второе сечение дает дугу полуокружности, вписанной между параллельными плоскостями. Радиус кривизны этого сечения $R_2 = d/2$. Тогда для избыточного давления находим:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d}\,. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), определим высоту подъема жидкости:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 14{,}9\ \text{мм}.$$

Пластины «притягиваются» друг к другу потому, что давление на пластины со стороны жидкости меньше наружного атмосферного. На глубине z разность внутреннего и наружного давлений согласно (1) будет:

$$\rho g z - \Delta p\,. \tag{5}$$

Выделим на этом уровне тонкую горизонтальную полоску шириной dz и длиной l (см. рис. 6.1). Сила давления, действующая на полоску равна:

$$dF = (\rho g z - \Delta p) l dz\,.$$

Полная сила найдется интегрированием по высоте столба жидкости между пластинами:

$$F = \int_0^h (\rho g z - \Delta p) l dz = \frac{l \rho g h^2}{2} - \frac{2\sigma l}{d} h\,. \tag{6}$$

После подстановки числовых значений получим

$$F = \frac{2\sigma^2 l}{d^2 \rho g} = 13\,\text{Н}\,.$$

<u>Задача 2</u>. Стеклянный стержень диаметром d_1 = 1,5 мм вставили симметрично в стеклянный капилляр с внутренним диаметром d_2 = 2 мм. Систему установили вертикально и коснулись воды (рис. 6.2). На какую высоту поднимется вода в таком капилляре?

d_1 = 1,5 мм
d_2 = 2 мм
$\sigma = 72\,\frac{\text{мН}}{\text{м}}$

h – ?

Высота подъема жидкости в капилляре определяется лапласовым давлением:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g}\,. \tag{1}$$

Для нахождения Δp надо знать радиусы кривизны менисков в двух взаимно перпендикулярных сечениях:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{2}$$

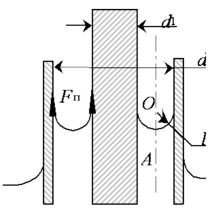


Рис.6.2

Пусть одно из сечений проходит через ось капилляра, как показано на рисунке. Тогда первый радиус кривизны можно принять равным половине зазора между капилляром и стержнем:

$$R_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} = \frac{(d_2 - d_1)}{4}. \qquad (3)$$

Радиус кривизны R_2 для второго сечения, которое проходит через нижнюю точку A мениска, равен бесконечности, и формула (2) принимает вид:

$$\Delta p = \frac{\sigma}{R_1} = \frac{4\sigma}{d_2 - d_1}. \qquad (4)$$

После подстановки (4) в (1) находим:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g(d_2 - d_1)} = 6 \text{ см}. \qquad (5)$$

Рассмотрим другой способ решения задачи. Вес столба жидкости в зазоре уравновешивается силой поверхностного натяжения, действующей вдоль контура контакта вода–стекло (см. рис. 6.2). Для силы поверхностного натяжения находим:

$$F_п = \sigma(l_1 + l_2) = \sigma\pi(d_1 + d_2). \qquad (6)$$

Вес столба жидкости равен:

$$P = mg = \rho g V = \rho g h\pi\left(d_2^2 - d_1^2\right)/4. \qquad (7)$$

Приравнивая (6) и (7) приходим к формуле (5).

<u>Задача 3</u>. Какую работу надо совершить, чтобы каплю масла массой 0,1 г раздробить на капельки радиусом r = 1 мкм. Процесс дробления изотермический, плотность масла ρ = 0,9 г/см^3, коэффициент поверхностного натяжения на границе вода–масло σ = 18 мН/м.

m = 0.1 г
r = 1 мкм
ρ = 0,9 г/см^3
σ = 18 мН/м

A – ?

При изотермическом дроблении капли затрачивается энергия на образование добавочной поверхности:

$$A = \sigma\Delta S, \qquad (1)$$

где ΔS – приращение площади поверхности капель, которое можно найти по формуле:

$$\Delta S = NS - S_0 = 4\pi\left(Nr^2 - r_0^2\right), \qquad (2)$$

где S_0 и r_0 – площадь поверхности и радиус капли до дробления, N – число мелких капель после дробления, S и r – площадь поверхности и радиус капли после дробления.

Масса масла при дроблении не изменяется, и поэтому можно записать:

$$m = \frac{4}{3}\pi r_0^3\rho = N\frac{4}{3}\pi r^3\rho. \qquad (3)$$

Отсюда найдем число мелких капель и связь между радиусами:

$$N = \frac{3m}{4\pi\rho r^3}, \quad r_0 = rN^{1/3} . \tag{4}$$

Подставляя (5) в (2), найдем приращение площади поверхности капель

$$\Delta S = 4\pi r^2 N\left(1 - N^{-1/3}\right). \tag{5}$$

Для большого числа капель $N^{-1/3} << 1$ и можно записать приближенно:

$$\Delta S = 4\pi r^2 N . \tag{6}$$

Подставляя (7) в (1), находим нужную работу:

$$A = \frac{3m\sigma}{\rho r} = 6\,\text{мДж} . \tag{7}$$

Отметим, что затраченная на дробление капель энергия обратно пропорциональная радиусу капель.

<u>Задача 4</u>. Найти работу, которую надо совершить, чтобы изотермически выдуть мыльный пузырь радиуса $R = 7$ см, если давление окружающего воздуха $p_a = 1$ атм, а поверхностное натяжение мыльной воды $\sigma = 0{,}04$ Н/м.

$R = 7$ см
$p_a = 1$ атм
$\sigma = 0{,}04$ Н/м

$A - ?$

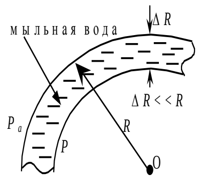


Рис. 6.3

При выдувании пузыря совершается работа A, которая идет на увеличение поверхностной энергии U_s мыльной пленки и на сжатие газа внутри пузыря от начального давления p_a до конечного p.

$$A = U_s + A_c . \tag{1}$$

Поверхностную энергию мыльной пленки найдем по формуле:

$$U_s = 2 \cdot 4\pi R^2 \sigma = 8\pi R^2 \sigma . \tag{2}$$

В соотношении (2) учтено, что мыльная пленка имеет две поверхности: наружную и внутреннюю (рис. 6.3). Давление газа p_1 внутри пузыря объемом V_1 будет больше внешнего давления p_a на величину, обусловленную поверхностным натяжением двух пленок:

$$p_1 = p_a + 2\Delta p = p_a + \frac{4\sigma}{R} . \tag{3}$$

Работу по сжатию газа в изотермическом процессе найдем по формуле:

$$A_c = -\int\limits_{V_a}^{V_1} p dV = p_1 V_1 \ln\frac{V_a}{V_1} = p_1 V_1 \ln\frac{p_1}{p_a} . \tag{4}$$

Здесь V_a – объем газа, содержащегося в мыльном пузыре при атмосферном давлении p_a. Подставляя (2), (3) и (4) в (1), определяем искомую работу

$$A = 8\pi R^2\sigma + p_a\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_a}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \ln\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_a}\right). \qquad (5)$$

При больших радиусах избыточное давление $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{R} << p_a$ и формулу (5) можно упростить. Разложив логарифм в ряд, и оставив члены первого порядка малости, получим:

$$A = 8\pi R^2\sigma\left(1+\frac{2}{3}\right) = 8{,}2\cdot 10^{-3}\text{ Дж}.$$

Задача 5. Определить концентрацию, при которой среднее расстояние между молекулами азота в 100 раз меньше, чем длина свободного пробега молекул газа. Эффективный диаметр $d_{эф}$ молекул азота равен $3{,}7\cdot10^{-8}$ см.

$d = 3{,}7\cdot10^{-8}$ см
$l/\lambda = 1/100$

n – ?

Будем считать, что молекулы равномерно распределены по объему и на каждую молекулу приходится кубик объемом ΔV с ребром, равным среднему расстоянию между молекулами:

$$\Delta V = l^3. \qquad (1)$$

Если n – концентрация молекул, то $n\cdot\Delta V = 1$ м^3. Отсюда находим среднее расстояние между молекулами

$$l = n^{-1/3}. \qquad (2)$$

Средняя длина свободного пробега молекулы согласно условию равна

$$\lambda = 100\cdot l. \qquad (3)$$

Учитывая выражение (6.5) для λ и соотношения (2) и (3) получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = 100\cdot n^{-1/3}.$$

Отсюда находим концентрацию молекул:

$$n = \left(\sqrt{2}\pi d_{эф}^2\cdot 100\right)^{-3/2} = 3{,}5\cdot10^{24}\text{ м}^{-3}$$

$d = 0{,}37$ нм
N_2
$P_0 = 10^5$ Па
$T_0 = 273$ К

ν – ?

Задача 6. Азот находится при нормальных условиях. Найти число столкновений, испытываемых в среднем каждой молекулой за одну секунду. Эффективный диаметр молекулы азота 0,37 нм.

За одну секунду молекула в среднем проходит расстояние

$$S = \langle v\rangle\cdot 1 = \langle v\rangle. \qquad (1)$$

Расстояние между двумя последовательными столкновениями равно средней длине свободного пробега (6.5):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}\,. \qquad (2)$$

На пути длиной S молекула столкнется υ раз:

$$\upsilon = \frac{S}{\lambda} = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle\,. \qquad (3)$$

Средняя скорость молекул азота равна

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi\mu}}\,. \qquad (4)$$

Концентрация молекул связана с давлением и температурой уравнением:

$$n = \frac{p_0}{kT_0}\,. \qquad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3) получаем искомое число столкновений:

$$\nu = \sqrt{2}\pi d^2\,\frac{p_0}{kT_0}\sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m_0}} = \frac{4\sqrt{\pi}\,p_0 N_A d^2}{\sqrt{\mu R T_0}} = 0{,}74\cdot 10^{10}\ \text{с}^{-1}\,.$$

Задача 7. Стержень длины l с теплоизолированной боковой поверхностью состоит из материала, коэффициент теплопроводности которого изменяется с температурой по закону $\alpha = a/T$ где a – постоянная. Торцы стержня поддерживаются при температурах T_1 и T_2. Найти распределение температуры по длине стержня.

T_1
T_2
$\alpha = a/T$
l

$T(x)$ – ?

Направим ось x вдоль стержня, начало координат поместим у торца с температурой T_1 (рис. 6.4). Выделим элементарный кусочек стержня толщиной dx. Так как температура стержня не изменяется со временем, то это значит, что плотность потока тепла j_T является постоянной величиной. Согласно закону Фурье для теплопроводности имеем

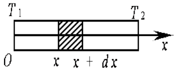


Рис. 6.4

$$\alpha\,\frac{dT}{dx} = C_1 = \text{const}\,. \qquad (1)$$

Подставляя зависимость $\alpha(T)$, получаем дифференциальное уравнение для распределения температуры

$$\frac{a}{T}\cdot\frac{dT}{dx} = C_1\,. \qquad (2)$$

После интегрирования находим

$$T = C_2 e^{\frac{C_1 x}{a}}\,. \qquad (3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из краевых условий

$$T(0) = T_1 \quad T(l) = T_2 \ . \tag{4}$$

После подстановки условий (4) в (3) определим постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{a}{l}\ln\frac{T_2}{T_1}, \quad C_2 = T_1,$$

и искомую зависимость $T(x)$:

$$T(x) = T_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{x}{l}}.$$

Задача 8. Пространство между двумя соосными цилиндрами заполнено водородом при нормальных условиях. Радиус внутреннего цилиндра r, зазор между ними Δr, причем $\Delta r \ll r$. Внешний цилиндр вращают с небольшой угловой скоростью ω (рис. 6.5). Какой момент силы нужно приложить к внутреннему цилиндру, чтобы он оставался неподвижным? Длина цилиндра L.

ω
r
Δr
L
$M - ?$

Как известно, между слоями движущегося газа возникает сила трения, подчиняющаяся закону (6.7). Слой молекул возле вращающегося цилиндра будет иметь скорость упорядоченного движения v_2, равную линейной скорости цилиндра

$$v_2 = \omega r_2 = \omega(r + \Delta r) \approx \omega r \ . \tag{1}$$

Молекулы газа возле внутреннего цилиндра покоятся: $v_1 = 0$. В пространстве между цилиндрами скорость движения газа изменяется от v_1 до v_2, как это показано на рис. 6.5. Сила, действующая на элемент длиной dl внутреннего цилиндра, будет равна

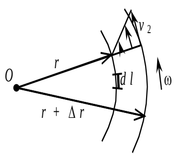


Рис. 6.5

$$dF = \eta L dl \cdot \frac{dv}{dr}, \tag{2}$$

где η – коэффициент вязкости (внутреннего трения) водорода, который можно рассчитать по формуле или взять из таблицы.

Градиент скорости dv/dr найдем, предположив, что скорость линейно изменяется между цилиндрами. Такое допущение справедливо, если расстояние $\Delta r = r_2 - r_1$ между цилиндрами мало по сравнению с их радиусами. Тогда получим

$$\frac{dv}{dr} \approx \frac{v_2}{\Delta r} = \frac{\omega r}{\Delta r} \ . \tag{3}$$

Момент сил, действующих на выделенный элемент поверхности длиной dl, равен

$$dM = r \cdot dF = \frac{\eta\omega r^2 L dl}{\Delta r}. \tag{4}$$

Полный момент сил, действующих на всю поверхность цилиндра, найдем, проинтегрировав по поверхности

$$M = \frac{\eta\omega r^2 L}{\Delta r} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi\eta L\omega r^3}{\Delta r}. \tag{5}$$

Задачи для контроля

1. Найти разность уровней ртути в двух сообщающихся вертикальных капиллярах, диаметры которых d_1 = 0,5 мм и d_2 = 1,0 мм, если краевой угол равен 138^0.

2. На дне пруда выделился пузырек газа диаметра 4 мкм. При подъеме его к поверхности воды диаметр увеличился в 1,2 раза. Какова глубина пруда в данном месте? Атмосферное давление нормальное, расширение газа изотермическое.

3. Вычислить приращение свободной энергии поверхностного слоя при изотермическом слиянии двух одинаковых капель ртути, каждая диаметром 1,5 мм.

4. Найти силу притяжения двух параллельных стеклянных пластинок, отстоящих друг от друга на расстояние h = 0,1 мм, после того, как между ними ввели каплю воды массы m = 70 мг. Смачивание полное.

5. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его давление возросло в n раз. Как и во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени, если процесс: а) изохорический; б) изотермический?

6. Теплопроводность гелия в 8,7 раза больше, чем у аргона (при нормальных условиях). Найти отношение эффективных диаметров атомов аргона и гелия.

7. Найти распределение температур в веществе, находящемся между двумя большими параллельными пластинами, если последние поддерживают при температурах T_1 и T_2, расстояние между ними равно l и теплопроводность вещества $\alpha \sim \sqrt{T}$.

8. Самолет летит со скоростью v = 360 км/ч. Считая, что толщина слоя воздуха δ у крыла самолета, увлекаемого вследствие вязкости, равна 4 см, найти касательную силу F_s, действующую поверхность крыла. Эффективный

диаметр молекул воздуха d = 0,3 нм, температура воздуха t = 0 °С, площадь поверхности крыла S = 10 м^2.

Задачи для самостоятельной работы

1. В сосуде с воздухом при давлении p_0 находится мыльный пузырек диаметра d. Давление воздуха изотермически уменьшили в n раз, в результате чего диаметр пузырька увеличился в η раз. Найти поверхностное натяжение мыльной воды.

Ответ: $\alpha = p_0 d\,(1-\eta^3/n)/8\,(\eta^2-1)$.

2. Найти давление в пузырьке воздуха диаметра d = 4,0 мкм, который находится в воде на глубине h = 5,0 м. Атмосферное давление p_0 нормальное.

Ответ: $p = p_0 + \rho g h + 4\alpha/d$ = 2,2 атм.

3. Вертикальный капилляр длины l с запаянным верхним концом привели в соприкосновение с поверхностью жидкости, после чего она поднялась на высоту h. Плотность жидкости ρ, диаметр внутреннего канала капилляра d, краевой угол θ, атмосферное давление p_0. Найти поверхностное натяжение жидкости.

Ответ: $\alpha = [\rho g h + p_0 l\,(l-h)]\,d/4\cos\theta$.

4. Между двумя горизонтальными стеклянными пластинками находится капля ртути в форме лепешки радиуса R и толщины h. Считая, что $h \ll R$, найти массу m груза, который надо положить на верхнюю пластинку, чтобы расстояние между пластинками уменьшилось в n раз. Краевой угол равен θ. Вычислить m, если R = 2 см, h = 0,38 мм, n = 2 и θ = 135°.

Ответ: $m \approx 2\pi R^2\sigma|\cos\theta|\left(n^2-1\right)/\,gh = 0{,}7\text{ кг}$.

5. Как зависят средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени от температуры T идеального газа в следующих процессах: а) изохорическом; б) изобарическом.

Ответ: а) λ = const, $\upsilon \approx \sqrt{T}$; б) $\lambda \approx T$, $\upsilon \approx 1/\sqrt{T}$.

6. Зная вязкость гелия при нормальных условиях η = 18,9 мкПа·с, вычислить эффективный диаметр его атома. Ответ: d = 0,18 нм.

7. Два одинаковых параллельных диска, оси которых совпадают, расположены на расстоянии h друг от друга. Радиус каждого диска равен R, причем $R \gg h$. Один диск вращают с небольшой угловой скоростью ω, другой диск неподвижен. Найти момент сил трения, действующий на неподвижный диск, если вязкость газа между дисками равна η.

Ответ: $M = \pi\eta\omega R^4/2h$.

8. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра T_1, а внешнего T_2.

Ответ: $T = T_1 + [(T_2 - T_1)/\ln(R_2/R_1)]\ln(r/R_1)$.

9. Один конец стержня, заключенного в теплоизолирующую оболочку, поддерживается при температуре T_1, а другой конец – при температуре T_2. Сам стержень состоит из двух частей, длины которых l_1 и l_2 и коэффициенты теплопроводности α_1 и α_2. Найти температуру поверхности соприкосновения этих частей стержня

Ответ: $T = (\alpha_1 T_1/l_1 + \alpha_2 T_2/l_2)/(\alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2)$.

10. В алюминиевой кастрюле выкипает за 5 минут 100 г воды при температуре 100 °С. Определить разность температур нижней и верхней поверхностей дна кастрюли, если толщина дна 2 мм, а его площадь 200 см^2. Теплообменом через боковые стенки кастрюли и излучением пренебречь. Коэффициент теплопроводности алюминия 210 Дж/м·с·К.

Ответ: ΔT = 0,36 К.

Список рекомендованной литературы

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин.– М.: Наука, 1979. – Т. 2. – 551 с.

2. Кикоин А. К. Молекулярная физика / А. К. Кикоин, И. К. Кикоин. – М.: Наука, 1978. – 480 с.

3. Матвеев А. Н. Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1987. – 395 с.

4. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 416 с.

5. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

6. Русаков В. Ф. Молекулярная физика / В. Ф. Русаков, В. В. Чабаненко. – Донецк: ДонНУ, 2014. – 78 с.

7. Русаков В. Ф. Молекулярная физика и термодинамика / В. Ф. Русаков. – Донецк: ДонНУ, 2014. – 97 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович
Русакова Надія Михайлівна
Зуйкова Зоя Геннадіївна

МЕТОДИКА РОЗВ′ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З МОЛЕКУЛЯОНОЇ ФІЗИКИ Й ТЕРМОДИНАМІКИ

(методичний посібник для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей напряму «Комп′ютерні науки», «Математика», «Прикладна математика» та «Метрологія й вимірювальна техніка»)

(Російською мовою)

Редактор А. О. Цяпало
Технічний редактор О. К. Гомон

Підписано до друку
Формат 60 х 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 4,07
Тираж 100 прим. Зам. № 21

Донецький національний університет
21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1854 від 24.06.2004 р.