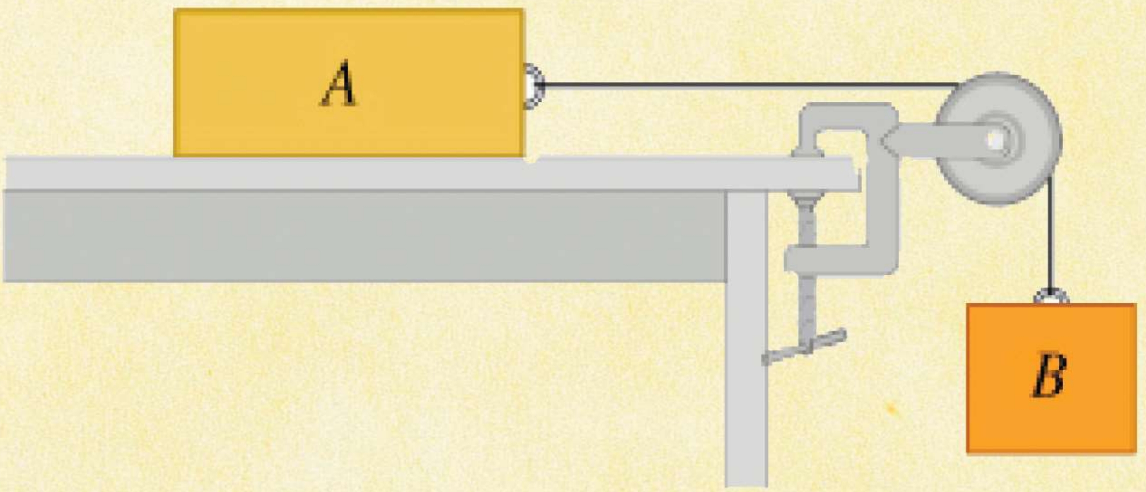
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ



Винница, 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ДИДАКТИКИ ФИЗИКИ

В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ

(для студентов дневной формы обучения специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Компьютерные науки», «Метрология, информационно-измерительные технологии и измерительная техника»)

Учебное пособие

Винница
ДонНУ
2015

УДК 378. 147:52
Р 882

Русаков В. Ф. д-р физ.-мат наук, профессор,
Русакова Н. М. ст. преподаватель.

Рекомендовано к изданию решением ученого совета
физико-технического факультета ДонНУ
(протокол № 4 от 20.02.2015.)

Русаков В. Ф.
Р 882 Методика решения задач по механике (для студентов дневной формы обучения специальностей «математика», «прикладная математика», «компьютерные науки», «метрология, информационно-измерительные технологии и измерительная техника») / В. Ф. Русаков, Н. М. Русакова. – Винница: ДонНУ, 2015. – 53 с.

Весь материал пособия разбит на четыре раздела: кинематика, динамика точки, законы сохранения и динамика твердого тела. В начале каждого раздела приводятся основные понятия и формулы, необходимые для решения задач, излагаются методические указания к решению задач. Подробно разбирается методика решения типовых задач. Приводятся задачи для контроля и самостоятельной работы. Пособие составлено таким образом, что позволяет обойтись на практических занятиях без задачников.

УДК 378.147:34

I. Кинематика

Кинематика точки

Кинематика – раздел механики, изучающий движение, безотносительно к причинам его породившим. Все системы отсчета в кинематике равноправны. В кинематике различают прямую и обратную задачи.

Прямая задача кинематики – по заданному положению тела в пространстве в любой момент времени определить скорость и ускорение также в любой момент времени. Метод решения – дифференцирование.

Обратная задача – по заданному ускорению, как функции времени, найти скорость и координаты или радиус-вектор частицы в любой момент времени. Метод решения – интегрирование. Для однозначного решения обратной задачи необходимо задать начальные условия, то есть положение тела, и его скорость в начальный момент времени.

Различают три способа задания движения: векторный, координатный и естественный. Рассмотрим их более подробно.

1. Векторный способ

а) Прямая задача кинематики: задана зависимость от времени радиус-вектора, характеризующего положение материальной точки $\vec{r}(t)$. Необходимо найти скорость $\vec{v}(t)$ и ускорение $\vec{w}(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \tag{1.1}$$

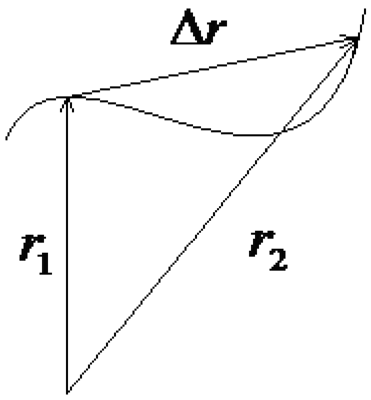


Рис. 1.1

Это есть мгновенная скорость. (Здесь мы воспользовались общепринятым в физике обозначением: точка над буквой обозначает производную по времени). Если нас интересуют средние значения, тогда:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{s(t)}{\Delta t}, \tag{1.2}$$

$$\langle \vec{v}(t) \rangle = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Здесь s и $\Delta\vec{r}(t)$ – путь и перемещение тела за время Δt.

Мгновенное ускорение определяется из соотношения:

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\,. \tag{1.4}$$

Для определения средних значений можно воспользоваться формулами аналогичными (1.2) и (1.3).

б) Обратная задача: задано ускорение, как функция времени $\vec{w}(t)$, найти скорость и радиус-вектор.

$$\vec{v}(0)=\vec{v}_0,\ \vec{r}(0)=\vec{r}_0.$$

Умножив обе части равенства (1.4) на dt, получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}dt = d\vec{v} = \vec{w}(t)dt. \qquad (1.5)$$

Проинтегрируем с учетом начальных условий:

$$\int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int\limits_0^t \vec{w}(t)dt. \qquad (1.6)$$

В случае равноускоренного движения $\vec{w}=const$, вместо (1.6) будем иметь:

$$\vec{v}(t)-\vec{v}_0=\vec{w}t,$$

или

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{w}t. \qquad (1.7)$$

Далее, умножим (1.1) на dt и проинтегрируем:

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int\limits_0^t \vec{v}(t)dt. \qquad (1.8)$$

В случае равноускоренного движения, подставив в (1.8) (1.7) получим:

$$\vec{r}(t)-\vec{r}_0=\int\limits_0^t(\vec{v}_0+\vec{w}t)dt=\vec{v}_0t+\frac{\vec{w}t^2}{2},$$

или

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{w}t^2}{2}. \qquad (1.9)$$

Соотношения (1.7) и (1.9) дают хорошо известные из школьного курса соотношения для равноускоренного движения. Если же $\vec{w}=\vec{f}(t)$ следует воспользоваться соотношениями (1.6) и (1.8).

Путь, пройденный телом, есть:

$$s(t)=\int\limits_0^t |\vec{v}(t)|dt. \qquad (1.10)$$

Из (1.6) в общем случае получим:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\int\limits_0^t \vec{w}(t)dt. \qquad (1.11)$$

Подставляя найденное выражение для скорости в уравнение (1.8), будем иметь:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \int_0^t \left(\int_0^t \vec{w}(t)dt \right) dt. \qquad (1.12)$$

2. Координатный способ

а) Прямая задача кинематики: заданы координаты материальной точки как функции времени, необходимо найти проекции скорости и ускорения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad (1.13)$$

Поступая, как и в предыдущем случае, получим:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ v_z &= \frac{dz}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Соотношения (1.14) решают поставленную задачу. Модули векторов скорости и ускорения найдем, воспользовавшись определением:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,; \quad |\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}\,.$$

От координатного способа можно перейти к векторному, вводя орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответствующих осей:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \\ \vec{v}(t) &= v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}, \\ \vec{w}(t) &= w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

б) Обратная задача: заданы проекции ускорения, необходимо найти проекции вектора скорости и координаты. Начальные условия имеют вид:

$$v_x(0) = v_{x0}; \; x(0) = x_0.$$

Поступая, как и в предыдущем случае, найдем:

$$v_x(t) = v_{x0} + \int_0^t w_x(t)dt, \; x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)dt. \qquad (1.15)$$

Аналогично для y, z и v_y, v_z.

В случае равноускоренного движения место (1.15) по аналогии с (1.7) и (1.9) будем иметь:

$$v_x(t) = v_{x0} + w_x t, \; x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{w_x t^2}{2}. \qquad (1.16)$$

Уравнение линии, вдоль которой движется тело, называется уравнением траектории. Если из (1.13) исключить время, получим уравнение траектории. Уравнение (1.13) называют уравнением траектории в параметрическом виде.

3. Естественный способ

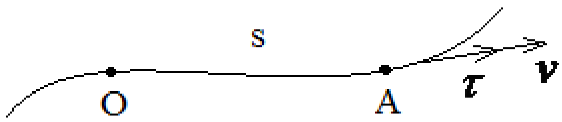


Рис. 1.2

Этот способ применяется тогда, когда заранее известна траектория точки, положение ее определяется дуговой координатой s, отсчитанной вдоль траектории от выбранного начала 0. Движение определено, если известны: траектория, начало отсчета, положительное направление и закон движения $s(t)$.

Скорость при криволинейном движении можно записать в виде:

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}, \tag{1.17}$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории. Обозначим s – расстояние от начала отсчета вдоль траектории – путь, пройденный телом. Тогда:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}; \quad |\vec{v}| = |v_\tau| = v_\tau .$$

Ускорение по определению

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \tag{1.18}$$

$\dfrac{dv_\tau}{dt} = w_\tau$ – характеризует изменение скорости по величине и называется тангенциальным ускорением. Таким образом, из (1.18) видим, что при движении по криволинейной траектории ускорение включает две составляющих. Первое слагаемое (1.18) обусловлено изменением скорости по величине и направлено по касательной к траектории, оно называется тангенциальным ускорением $\vec{w}_\tau$, второе направлено вдоль нормали траектории и называется нормальным или центростремительным ускорением $\vec{w}_n$:

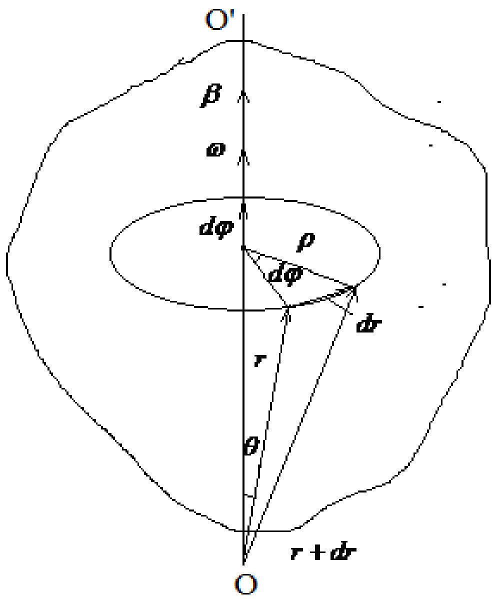


Рис. 1.3

$$|\vec{w}_\tau| = \frac{dv}{dt}; \quad |\vec{w}_n| = \frac{v^2}{r}, \tag{1.19}$$

где r – радиус кривизны траектории в данной точке. Полное ускорение $\vec{w}$ есть:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n, \quad |\vec{w}| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \tag{1.20}$$

Кинематика твердого тела

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси OO'. При этом все точки твердого тела будут вращаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси, а центры лежат на оси. Бесконечно малый угол поворота $d\varphi$ можно рассматривать как аксиальный вектор. Линейное $d\vec{r}$ и угловое $d\varphi$ перемещения связаны соотношением:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}], \tag{1.21}$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор, характеризующий положение элементарной массы, относительно выбранного начала.

Для характеристики вращательного движения вводят понятие угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\beta}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \tag{1.22}$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.23}$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ являются аксиальными, они направлены вдоль оси вращения.

Соотношение (1.21) позволяет найти связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками движения.

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}], \tag{1.24}$$

$$\vec{w} = [\vec{\beta} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]. \tag{1.25}$$

Первое слагаемое (1.25) представляет тангенциальное ускорение $\vec{w}_\tau$, второе – нормальное $\vec{w}_n$, модули которых равны:

$$w_\tau = \beta\rho, \tag{1.26}$$

$$w_n = \omega^2\rho = \frac{v^2}{\rho}, \tag{1.27}$$

здесь ρ – радиус окружности, по которой происходит вращение.

Примеры решения задач

Задача 1. Радиус вектор точки A относительно начала координат меняется со временем по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, где α и β – постоянные, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ орты осей x и y. Найти:

а) зависимость от времени скорости и ускорения точки и модулей этих величин;

б) уравнение траектории точки $y(x)$;

в) зависимость от времени угла φ между векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$.

$\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$
$\beta = const$
$\vec{v}(t) - ?$
$\vec{w}(t) - ?$
$\lvert v(t)\rvert - ?$
$\lvert w(t)\rvert - ?$
$y(x) - ?$
$\varphi(t) - ?$

а) Здесь мы имеем прямую задачу кинематики, причем движение задано в векторном виде. Воспользовавшись формулами (1.1) и (1.4), найдем:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}, \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\beta\vec{j}. \qquad (1)$$

Откуда видно, что

$$v_x = \alpha; \quad v_y = 2\beta t; \quad w_x = 0; \quad w_y = 2\beta.$$

Таким образом:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2},$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 2\beta. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают ответ на первый вопрос задачи. Видно, что ускорение направлено вдоль оси y и от времени не зависит, и как следствие меняется только y – составляющая скорости.

б) Чтобы найти уравнение траектории перейдем от векторной формы к координатной.

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t^2 \end{cases}. \qquad (3)$$

Система (3) дает уравнение траектории в параметрическом виде. Чтобы найти $y(x)$ в явном виде из этих уравнений, необходимо исключить время: выразим t из первого уравнения и подставим во второе:

$$y(x) = x^2\beta/\alpha^2.$$

Траектория точки является параболой.

в) Угол между векторами можно найти, воспользовавшись определением скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{|\vec{v}||\vec{w}|}.$$

Подставляя найденные значения, получим

$$\cos\varphi = \frac{2t\beta}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}}. \qquad (4)$$

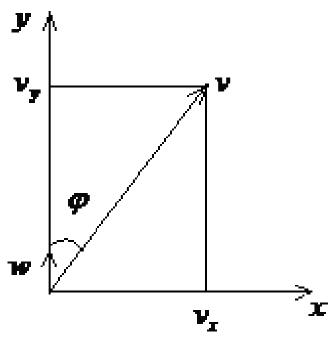


Рис. 1.4

В данной задаче угол можно найти значительно проще. Учитывая, что ускорение $\vec{w}$ направлено вдоль оси OY, можно сказать, что искомый угол равен углу, который образует вектор $\vec{v}$ с этой осью, тогда

$$tg\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\alpha}{2\beta t}.$$

Легко видеть, что при $\beta < 0$ рассматриваемое движение полностью аналогично движению тела брошенного горизонтально в гравитационном поле, т. к. $v_y(0) = 0$.

<u>Задача 2.</u> Точка движется, замедляясь по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени ее нормальное и тангенциальное ускорение по модулю равны друг другу. В начальный момент времени $t = 0$, $v(0) = v_0$. Найти зависимость:

а) скорости точки от времени и от пройденного пути;

б) полного ускорения точки от скорости и от пройденного пути.

$R,\ w_\tau < 0$

$|w_\tau| = |w_n|$

$v(0) = v_0$

$v(t) - ?\quad v(s) - ?$

$w(v) - ?$

$w(s) - ?$

а) По постановке это обратная задача кинематики. Воспользуемся соотношениями (1.19)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Здесь мы учитываем, что точка движется замедляясь. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{R}\int_0^t dt, \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 t/R}. \qquad (2)$$

Чтобы найти $v(s)$, необходимо найти путь, как функцию времени, проинтегрировав еще раз соотношение (2) и из полученных уравнений исключить время. Но можно поступить и иначе. Выразим dt из определения модуля скорости $v = ds/dt$ и подставим в уравнение (1), тогда

$$dt = ds/v, \quad vdv/ds = -v^2/R,$$

или

$$dv/v = -ds/R.$$

Откуда после интегрирования получим

$$v = v_0 e^{-s/R}. \qquad (3)$$

Как и должно быть, в процессе движения скорость уменьшается (по условию тело движется замедляясь).

б) Определение ускорения теперь не представляет труда.

$$w(v) = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = w_n\sqrt{2} = \sqrt{2}\frac{v^2}{R}. \qquad (4)$$

Подставляя сюда зависимость $v(s)$ из (3), найдем:

$$w(s) = \sqrt{2}\frac{v_0^2}{R}e^{-2s/R}. \qquad (5)$$

<u>Задача 3.</u> Найти закон движения, уравнение траектории и радиус кривизны траектории материальной точки, брошенной под углом α к горизонту со скоростью v_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

α
$v(0) = v_0$
$\vec{r}(t) - ?$
$y(x) - ?$
$R(t) - ?$

а) Тело движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Используя (1.7) получим:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t. \qquad (1)$$

Помещая начало координат в точку бросания из (1.9), будем иметь:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2. \qquad (2)$$

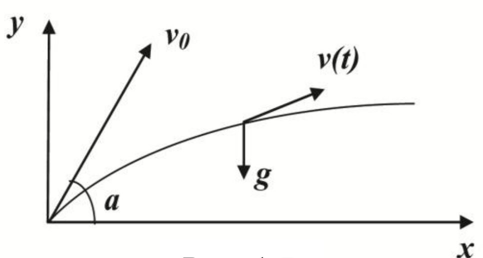


Рис. 1.5

б) Чтобы найти уравнение траектории спроектируем (2) на координатные оси и исключим из полученных уравнений время:

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}; \qquad (3)$$

$$t = \frac{x}{\cos\alpha}; \qquad y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Таким образом, траектория представляет собой параболу, ветви которой обращены вниз, а вершина смещена из начала координат.

в) Найдем зависимость от времени радиуса кривизны траектории $R(t)$. Проще всего $R(t)$ найти из выражения для нормального ускорения:

$$w_n(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)}; \qquad R(t) = \frac{v^2(t)}{w_n(t)}. \tag{4}$$

Задача сводится к определению нормального ускорения. Учитывая, что полное ускорение равно $\vec{g}$ из (1.20) получим:

$$w_n = \sqrt{g^2 - w_\tau^2}. \tag{5}$$

Причем $w_\tau = \dfrac{dv}{dt}$. Модуль $|\vec{v}|$ найдем из (1):

$$v = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}, \tag{6}$$

откуда

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t - v_0 vg\sin\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}} = -\frac{g}{v}v_y. \tag{7}$$

Подставим (7) в (5):

$$w_n = \sqrt{g^2 - \frac{g^2v_y^2}{v^2}} = \sqrt{g^2\,\frac{v^2 - v_y^2}{v^2}} = g\frac{v_x}{v}. \tag{8}$$

Учитывая, что $v_x = v_0\cos\alpha$ и в процессе движения не меняется, после подстановки (8) в (4) найдем:

$$R(t) = \frac{v^3}{gv_x} = \frac{\left(v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha}. \tag{9}$$

Соотношение (9) дает ответ на последний вопрос задачи.

Задача 4. Точка движется, замедляясь по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости v по закону $|w| = \alpha\sqrt{v}$, где α – положительная постоянная. В начальный момент времени скорость равна v_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

$|\vec{w}| = \alpha\sqrt{v}$
$\alpha = const > 0$
$v(0) = v_0$

$S(t_0) - ?$
$t_0 - ?$

а) Начнем с ответа на второй вопрос задачи. В момент остановки скорость тела обращается в нуль. Следовательно, необходимо найти зависимость скорости от времени и положить ее равной нулю.

По определению

$$w = \frac{dv}{dt} = -\alpha\sqrt{v}. \tag{1}$$

Знак минус, т. к. точка движется замедляясь. Разделяя в (1) переменные и интегрируя, будем иметь:

$$\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{\sqrt{v}}=-\alpha\int\limits_0^t dt\,;\qquad v=\left(\sqrt{v_0}-\frac{\alpha t}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Откуда:

$$v(t_0)=0=\left(\sqrt{v_0}-\frac{\alpha t_0}{2}\right)^2\ \Rightarrow\ t_0=\frac{2\sqrt{v_0}}{\alpha}. \tag{3}$$

б) Чтобы найти путь, пройденный телом до остановки, проинтегрируем (2) с учетом (3)

$$S=\int\limits_0^{t_0}\left(\sqrt{v_0}-\frac{\alpha t}{2}\right)^2 dt=-\frac{2}{3\alpha}\left(\sqrt{v_0}-\frac{\alpha t}{2}\right)^3\Bigg|_0^{\frac{2v_0^{3/2}}{3\alpha}}=\frac{2v_0^{3/2}}{3\alpha}. \tag{4}$$

<u>Задача 5.</u> Твердое тело вращается, замедляясь вокруг неподвижной оси с угловым ускорением β, пропорциональным $\sqrt{\omega}$, где ω – его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна ω_0.

$\beta\sim\sqrt{\omega}$
$\omega(0)=\omega_0$
$\langle\omega\rangle-?$

Среднюю угловую скорость можно найти по аналогии со средней линейной скоростью, определяемой соотношением (1.2). При этом, естественно, необходимо учесть, что роль пути во вращательном движении играет полный угол поворота φ. Тогда:

$$\langle\omega\rangle=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{1}$$

где Δt – время поворота на угол $\Delta\varphi$, причем:

$$\Delta\varphi(t)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\omega(t)dt. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) получим:

$$\langle\omega\rangle=\frac{1}{t_1-t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1}\omega(t)dt. \tag{3}$$

Это среднее значение ω за время $\Delta t=t_1-t_0$. Таким образом, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо найти $\omega(t)$. Запишем:

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=-\alpha\sqrt{\omega}, \tag{4}$$

знак минус, так как тело движется, замедляясь; α – коэффициент пропорциональности. Поступая как в предыдущей задаче с уравнением (1), найдем

$$\omega=\left(\sqrt{\omega_0}-\frac{\alpha t}{2}\right)^2, \qquad (5)$$

$$t_0=\frac{2\sqrt{\omega_0}}{\alpha}. \qquad (6)$$

Здесь t_0 – время движения до остановки. Подставим (5) и (6) в (3):

$$\langle\omega\rangle=\frac{\alpha}{2\sqrt{\omega_0}}\int\limits_0^{2\sqrt{\omega_0}/\alpha}\left(\sqrt{\omega_0}-\frac{\alpha t}{2}\right)^2dt=\frac{\omega_0}{3}. \qquad (7)$$

Оказывается, что средняя скорость за все время движения, составляет одну треть от начальной скорости, в то время как при равнозамедленном движении $\langle\omega\rangle=\omega_0/2$.

<u>**Задача 6.**</u> Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega=\omega_0-\alpha\varphi$, где ω_0 и α – положительные постоянные, $\varphi(0)=0$. Найти зависимость от времени угла поворота и угловой скорости.

$\omega=\omega_0-\alpha\varphi$

ω_0,

$\alpha=const>0$

$\varphi(0)=0$

$\varphi(t)-?$

$\omega(t)-?$

а) Спроектировав (1.22) на ось вращения запишем

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0-\alpha\varphi, \qquad (1)$$

или после разделения переменных

$$\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega_0-\alpha\varphi}=\int\limits_0^{t}dt. \qquad (2)$$

Здесь явно учтены начальные условия. Выполняя интегрирование, получим

$$\ln\left|1-\frac{\alpha\varphi}{\omega_0}\right|=-\alpha t,$$

откуда

$$\varphi=\frac{\omega_0}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right). \qquad (3)$$

б) Дифференцируя (3), легко найти угловую скорость как функцию времени, но можно поступить и иначе: подставить найденное $\varphi(t)$ в выражение, определяющее угловую скорость, как функцию угла поворота:

$$\omega=\omega_0-\alpha\frac{\omega_0}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)=\omega_0e^{-\alpha t}, \qquad (4)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_0}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\right)=\omega_0e^{-\alpha t}. \qquad (4^*)$$

Естественно, что оба способа приводят к одному и тому же результату.

Задача 7. Точка A находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью v. Найти модули и направления скорости и ускорения точки A.

R v	Изобразим на рисунке положение точки A в произвольный момент времени. Т. к. колесо катится без скольжения, v – это скорость точки C – центра масс колеса. Колесо совершает плоское движение, которое можно свести к чисто вращательному, относительно мгновенной оси вращения, причем мгновенная ось проходит через точку
$\vec{v}_A$ – ? $\vec{w}_A$ – ?	

O перпендикулярно плоскости рисунка, т. е. точку соприкосновения обода колеса с горизонтальной плоскостью, которая в каждый момент времени покоится (т. к. колесо катится без скольжения).

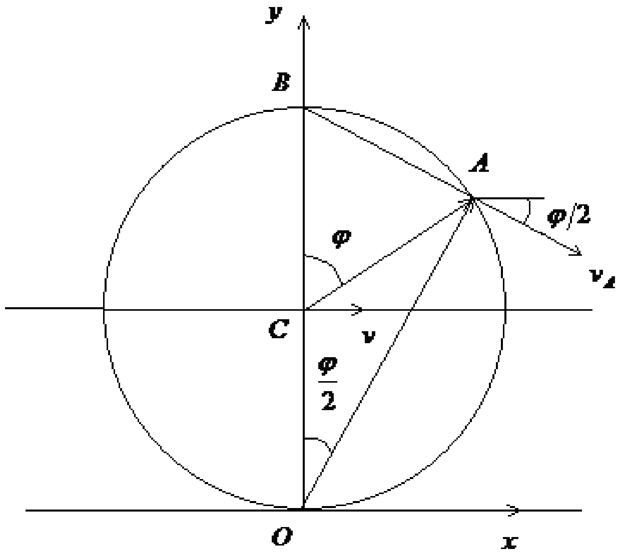


Рис. 1.6

Угловую скорость вращения вокруг мгновенной оси легко найти из соотношения

$$v = \omega R, \quad \omega = \frac{v}{R}. \qquad (1)$$

Угловая скорость вращения колеса вокруг оси, проходящей через точку C, параллельно мгновенной, также будет равна ω. Пусть в начальный момент времени точка A лежала на верхнем конце диаметра, тогда за время t радиус колеса повернется на угол

$$\varphi = \omega t. \qquad (2)$$

Из геометрических соображений (рис. 1.6) ясно, что угол $AOB = \varphi/2$. Радиус-вектор точки A в произвольный момент времени найдем из треугольника AOB.

$$OA = 2R\cos\frac{\omega t}{2}. \qquad (3)$$

Модуль вектор скорости точки A равен

$$v_A = \omega \cdot OA = 2v\cos\frac{\omega t}{2}. \qquad (4)$$

Направлен вектор скорости $\vec{v}_A$ перпендикулярно вектору $\vec{OA}$ в сторону вращения (рис. 1.6). Угол между $\vec{v}_A$ и горизонталью, также равен $\varphi/2$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

Чтобы найти полное ускорение w, необходимо найти его составляющие w_x и w_y. Из рисунка видно, что

$$v_x = 2v\cos^2\frac{\omega t}{2},$$

$$v_y = 2v\cos\frac{\omega t}{2}\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Дифференцируя написанные соотношения, получим

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = -2\frac{v^2}{R}\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2},$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v^2}{R}\sin^2\frac{\omega t}{2} + \frac{v^2}{R}\cos^2\frac{\omega t}{2}.$$

Откуда

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{v^2}{R}.$$

Очевидно, что w совпадает с центростремительным ускорением при вращении вокруг оси C и направлено по радиусу к центру колеса.

Задачи для контроля

1. Частица движется по закону $v = v_0 - bs$. Найти $s(t)$ и $v(t)$.

2. Записать уравнение движения, найти радиус кривизны и траекторию точки, брошенной под углом α к горизонту со скоростью v_0. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Два тела бросили горизонтально из одной точки в противоположные стороны со скоростями $v_1 = 3\,м/с$ и $v_2 = 4\,м/с$ соответственно. Найти расстояние между ними в тот момент, когда их скорости будут взаимно перпендикулярны.

4. Найти угол между векторами скорости и ускорения точки, если движение задано зависимостью $s = \alpha\sqrt{v}$, где α – постоянная. Радиус кривизны траектории равен R.

5. Точка движется с постоянным ускорением w, направленным в сторону, противоположную оси y. Ее траектория: $y = ax - bx^2$. Найти скорость точки в начале координат.

6. Тело бросили горизонтально с начальной скоростью v_0. Найти траекторию его движения и радиус кривизны.

7. Первоначально покоившаяся частица прошла за $t = 10$ с полторы окружности радиуса $R = 5$ м с постоянным w_τ. Найти за это время $\langle v \rangle$, $|\langle \vec{v} \rangle|$, $|\langle \vec{w} \rangle|$.

8. Тело вращается вокруг неподвижной оси, замедляясь так, что угловое ускорение β пропорционально ω^{-2}, начальная угловая скорость равна ω_0. Найти $\langle \omega \rangle$ от начала движения до остановки.

Задача для самостоятельного решения

1. Точка движется по прямой в одну сторону. На рис. 1.7 показан график пройденного ею пути s в зависимости от времени t. Найти с помощью этого графика:

а) среднюю скорость точки за время движения;

б) максимальную скорость;

в) момент времени t_0, в который мгновенная скорость равна средней скорости за первые t_0 секунд.

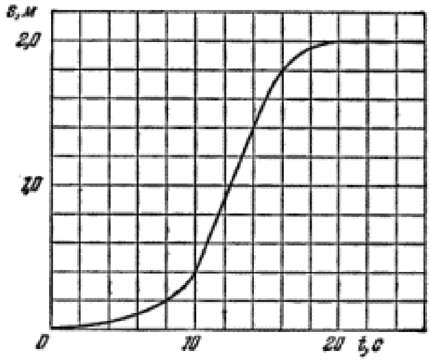


Рис. 1.7

Ответ: а) 10 см/с; б) 25 см/с; в) t_0=16 с.

2. Корабль движется по экватору на восток со скоростью 30 км/ч. С юго-востока под углом $\varphi = 60°$ к экватору дует ветер со скоростью v=15 км/ч. Найти скорость v' ветра относительно корабля и угол φ' между экватором и направлением ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

Ответ: $v' = \left(v_0^2 + v^2 + 2v_0 v \cos\varphi\right)^{1/2} \approx 40$ км/ч, $\varphi' = 19°$.

3.Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная постоянная. Имея в виду, что в момент $t = 0$ она находилась в точке $x = 0$, найти:

а) зависимость от времени скорости и ускорения частицы;

б) среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

Ответ: а) $v = \alpha^2 t/2$, $a = \alpha^2/2$; б) $\langle v \rangle = (\alpha/2)\sqrt{s}$.

4. Шарик падает с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

Ответ: $l = 8h \sin\alpha$.

5. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,10 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели?

Ответ: через 0,41 или 0,71 мин в зависимости от начального угла.

6. Точка движется по окружности со скоростью $v = \alpha t$, $\alpha = 0{,}50$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $n = 0{,}10$ длины окружности после начала движения.

Ответ: $a = \alpha\sqrt{1 + (4\pi n)^2} = 0{,}8$ м/с^2.

7. Точка движется по плоскости так, что её тангенциальное ускорение $a_\tau = \alpha$, а нормальное ускорение $a_n = \beta t^4$, где α и β – положительные постоянные, t – время. В момент $t = 0$ точка покоилась. Найти зависимость от пройденного пути s радиуса кривизны R траектории точки и её полного ускорения a.

Ответ: $R = \alpha^3/2\beta s$, $\quad a = \alpha\sqrt{1 + \left(4\beta s^2/\alpha^3\right)^2}$.

8. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской траектории $y(x)$. Найти ускорение частицы в точке $x = 0$ и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория:

а) парабола $y = \alpha x^2$;

б) эллипс $(x/\alpha)^2 + (y/\beta)^2 = 1$, где α и β – постоянные.

Ответ: а) $a = 2\alpha v^2$, $R = 1/2\alpha$; $\quad$ б) $a = \beta v^2/\alpha^2$, $R = \alpha^2/\beta$.

9. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки A в этот момент $v = 0{,}65$ м/с.

Ответ: $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4} = 0{,}7$ м/с^2.

10. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = \alpha t$, где $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки будет составлять угол $\varphi = 60°$ с ее вектором скорости?

Ответ: $t = \sqrt[3]{(4/\alpha) tg\varphi} = 7$ с.

11. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус цилиндра равен r. Найти радиус кривизны траекторий точек A и B (см. рис. 1.8).

Ответ: $R_A = 4r$, $\quad R_B = 2\sqrt{2}r$.

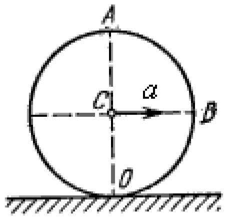


Рис. 1.8

II. Динамика материальной точки

Раздел механики, изучающий движение тел с учетом причин, его породивших, называется динамикой. Основную роль в динамике играет понятие силы. Сила – мера взаимодействия тел. Основной закон движения (второй закон Ньютона) записывается в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{P} = m\vec{v}$ – импульс тела, $\vec{F}$ – геометрическая сумма всех сил, действующих на тело. Следует помнить, что второй закон Ньютона, записанный в форме (2.1), справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Уравнение (2.1) можно записать в проекциях на координатные оси. В случае $m = const$, получим

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y, \quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z. \tag{2.2}$$

В случае криволинейного движения уравнение (2.1) целесообразно проектировать на направление нормали и касательной к траектории.

$$mw_\tau = F_\tau, \quad mw_n = F_n. \tag{2.3}$$

Все задачи динамики можно разбить на 2 класса: 1) по заданному закону движения тел вычислить силы, действующие на них; 2) по заданным силам определить закон движения тел.

Задачи первого типа решаются дифференцированием и сводятся к нахождению ускорений материальных точек системы.

Задачи второго типа являются основными в механике, их решение сводится к интегрированию дифференциальных уравнений, для однозначного решения которых необходимо задать начальные условия.

Взаимодействие тел определяет вид сил. В механике основными являются следующие силы:

1. Сила тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$ – направленная вертикально вниз.

2. Сила трения скольжения: $F_{тр} = kN$, k – коэффициент трения скольжения, N – модуль силы реакции, нормальной к поверхности соприкосновения тел.

Сила трения направлена противоположно скорости относительного движения данного тела.

3. Сила упругости: $\vec{F} = -k\vec{r}$, k – коэффициент упругости, $\vec{r}$ – радиус-вектор, характеризующий смещение из положения равновесия. Сила упругости направлена противоположно смещению.

4. Сила вязкого трения: $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$, λ – коэффициент вязкого трения, $\vec{v}$ – скорость. Сила вязкого трения направлена против скорости движения тел.

Методические указания к решению задач динамики

1. Сделать рисунок и изобразить все силы, действующие на материальную точку. Если рассматривается система материальных точек, изобразить все силы, действующие на каждую точку системы. Количество сил определяется числом тел, с которым взаимодействует рассматриваемое.

2. Выбрать систему отсчета. При этом, обычно, положительное направление одной из осей выбирается по направлению ускорения материальной точки. Если направление движения заранее неизвестно, в отсутствие силы трения направление оси выбирается произвольно. При наличии силы трения поступают следующим образом. Учитывая, что сила трения меняет ускорение, но не направление движения, сначала решают задачу без трения, определяют направление движения и затем, правильно указав направление $F_{тр}$, решают задачу с учетом сил трения.

3. Составить уравнение движения в векторном виде. В случае системы тел записать уравнения движения для каждого тела.

4. Спроектировать уравнение на оси системы координат.

5. Замкнуть полученную систему уравнений и решить ее с учетом начальных условий.

6. Исследовать полученный результат.

Замечание. Если тела связаны невесомой нитью, то силу напряжения нити следует считать одинаковой по всей ее длине. Покажем это. Пусть на участок нити длиной Δl и массой Δm действуют силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ со стороны соседних участков (рис. 2.1).

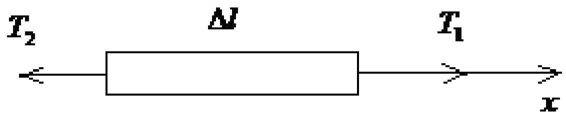


Рис. 2.1

Уравнение движения участка Δl в проекции на ось x запишется в виде:

$$\Delta m w_n = T_1 - T_2.$$

Полагая $\Delta m = 0$, получим $T_1 = T_2$. Если нить перекинута через блок, то равенство сил натяжения выполняется только тогда, когда можно пренебречь массами нити, блока и силами трения в оси блока.

Примеры решения задач

Задача 1. Частица движется вдоль оси x по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значение силы F_x в тот момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

$x = \alpha t^2 - \beta t^3$
$\alpha, \beta = const > 0$
$F_x(0) = F_0$
$F_x(x=0) - ?$

Сначала определим зависимость силы от времени. Для этого найдем ускорение частицы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\alpha - 6\beta t. \tag{1}$$

Далее

$$F_x(t) = m\ddot{x} = m(2\alpha - 6\beta t). \tag{2}$$

Для определения массы частицы воспользуемся начальным условием, положив в (2) $t = 0$:

$$F_0 = 2\alpha m, \quad m = \frac{F_0}{2\alpha}. \tag{3}$$

Следовательно,

$$F_x(t) = \frac{F_0}{2\alpha}(2\alpha - 6\beta t). \tag{4}$$

Найдем момент времени, когда частица вновь вернется в начало координат:

$$\alpha t^2 - \beta t^3 = 0; \quad t_{1,2} = 0, \quad t_3 = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{5}$$

Подставляя t_3 в (4), получим:

$$F_x(x=0) = \frac{F_0}{2\alpha}\left(2\alpha - 6\beta\frac{\alpha}{\beta}\right) = -2F_0. \tag{6}$$

Задача 2. Небольшое тело начинает скользить по наклонной плоскости из точки, расположенной над вертикальным упором A. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью k. При каком значении угла α время соскальзывания будет наименьшим?

$v(0) = 0$
k
$\alpha(t_{\min}) - ?$

Увеличение α уменьшает время соскальзывания с наклонной плоскости, но в данной конструкции сама длина плоскости увеличивается с ростом α, таким образом, возможно существование оптимального угла $\alpha(t_{\min})$, обеспечивающего минимальное время.

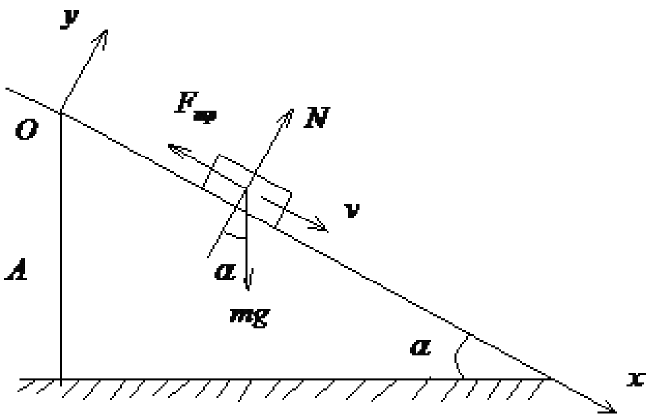


Рис. 2.2

На тело действуют следующие силы: сила тяжести – $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры – $\vec{N}$, сила трения скольжения – $\vec{F}_{тр}$.

Систему координат выберем таким образом: начало координат поместим в точку, где находилось тело в начальный момент времени, ось OX направим вдоль ускорения, OY – перпендикулярно.

Второй закон Ньютона запишется в виде:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} - \vec{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Спроектируем уравнение (1) на выбранные оси:

$$OX: \quad mw = mg\sin\alpha - F_{тр},$$

$$OY: \quad 0 = N - m\cos\alpha. \qquad 2)$$

Чтобы замкнуть систему (2) учтем, что $F_{тр} = kN$. Тогда из (2) легко найти ускорение:

$$w = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \qquad (3)$$

Теперь необходимо найти время движения и определить, при каком α оно будет минимально. Т. к. $w = const$ и $v(0) = 0$:

$$s = \frac{wt^2}{2}; \quad t = \sqrt{\frac{2s}{w}}. \qquad (4)$$

При изменении угла наклона плоскости будет меняться и путь, проходимый телом, но поскольку основание наклонной плоскости фиксировано, (расстояние от вершины до упора по горизонтали не изменяется), можно записать:

$$s = \frac{l}{\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Подставляя (3) и (5) в (4) будем иметь:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\cos\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)}}.$$

Далее нужно найти минимум функции $t = t(\alpha)$, но угловая зависимость содержится только в знаменателе, значит, минимум t соответствует максимуму знаменателя. Находя экстремум, получим, что время соскальзывания будет минимальным при

$$tg2\alpha = -\frac{1}{k}.$$

Легко показать, что очевидный на первый взгляд ответ: время соскальзывания будет минимальным при $\alpha = \pi/2$, является неверным, т. к. при этом точка A должна быть удалена на бесконечность, а для прохождения бесконечного пути с конечным ускорением потребуется бесконечное время.

Задача 3. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k = \gamma x$, где γ – постоянная величина. Найти максимальную скорость движения бруска.

α
$k = \gamma x$
$\gamma - const$

$v_{\max} - ?$

На тело действуют те же силы, что и в предыдущей задаче, только теперь сила трения скольжения зависит от пройденного пути. Систему координат выберем также как и в предыдущей задаче. Тогда в проекции на ось OX получим (см. формулу (3) предыдущей задачи)

$$w = g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha), \qquad (1)$$

здесь мы учли, что коэффициент трения зависит от пройденного пути.

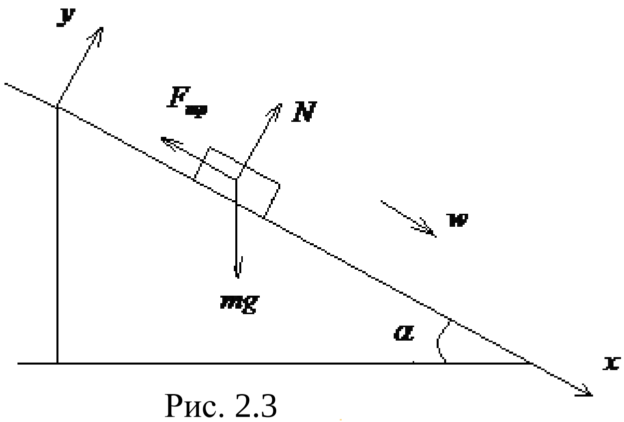


Рис. 2.3

Из (1) видно, что в начальный момент $(x = 0)$ ускорение максимально, затем оно уменьшается, обращается в нуль и становится отрицательным. Это приведет к тому, что тело, в конце концов, остановится. Из зависимости (1) ясно, что скорость сначала будет возрастать, достигнет максимума и начнет уменьшаться до нуля – тело остановится.

Найдем скорость тела. Учитывая, что $w = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, после подстановки в (1) получим дифференциальное уравнение второго порядка, которое можно решить любым известным методом, найти $x(t)$ и, продифференцировав по времени, получить $v(t)$, затем исследовать полученный результат на экстремум.

Мы поступим несколько иначе. Учтем, что $w = \dfrac{dv}{dt}$ и $v = \dfrac{dx}{dt}$. Выразим из последнего выражения dt и подставим его в w:

$$w = v\frac{dv}{dx}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и, умножив обе части полученного равенства на dx, проинтегрируем с учетом начальных условий:

$$\int_0^v v dv = g\int_0^x (\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx.$$

После выполнения элементарных преобразований получим:

$$v = \sqrt{2gx\left(\sin\alpha - \frac{\gamma x}{2}\cos\alpha\right)}. \qquad (3)$$

Теперь можно стандартным образом найти максимум выражения (3). Однако легко видеть, что в этом нет нужды. Очевидно, скорость максимальна в точке, где ускорение меняет знак, т. е. обращается в нуль:

$$w = 0 = g(\sin\alpha - \gamma x_0\cos\alpha), \text{ откуда } x_0 = \frac{1}{\gamma}tg\alpha.$$

Подставляя x_0 в выражение (3) для скорости и выполняя элементарные преобразования, получим:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g\sin^2\alpha}{y\cos\alpha}}.$$

Выражение (3) позволяет мгновенно найти путь, пройденный телом до остановки, для этого достаточно положить скорость равной нулю.

Задача 4. Груз массой m вращается на канате длиной l в горизонтальной плоскости, совершая n оборотов в минуту. Какой угол α с вертикалью образует канат и, какова сила его натяжения?

m
l
n
$\alpha - ?$
$T - ?$

На груз действуют силы: тяжести $m\vec{g}$ и натяжения каната $\vec{T}$. Систему координат выберем, как показано на рисунке. Уравнение движения запишется в виде:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}. \qquad (1)$$

Т. к. вращение по окружности происходит с постоянной по модулю скоростью $(n = const)$, то полное ускорение тела есть его нормальное ускорение, учитывая, что $\omega = 2\pi n$, запишем:

$$w_n = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R. \qquad (2)$$

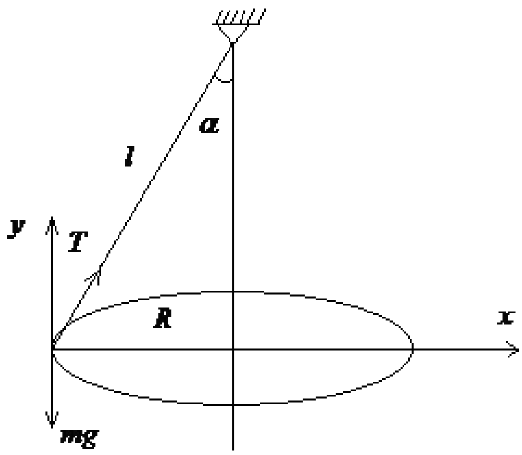


Рис. 2.4

Здесь R – радиус окружности, по которой происходит вращение: $R = l\sin\alpha$. Спроектируем (1) на выбранные оси, с учетом (2):

$$OX: \quad m4\pi^2 + n^2 l\sin\alpha = T\sin\alpha$$

$$OY: \quad 0 = T\cos\alpha - mg \qquad (3)$$

Решая систему (3), получаем:

$$T = 4\pi^2 n^2 lm, \quad \cos\alpha = g/4\pi^2 n^2 l. \qquad (4)$$

Сила натяжения каната не зависит от угла его отклонения от вертикали.

<u>Задача 5.</u> Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорение в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол θ_0 отклонения нити в крайнем положении.

$w\big\|_{\theta=0} = w\big\|_{\theta=\theta_0}$
$\theta_0 - ?$

Изобразим шарик в произвольном положении (рис. 2.5). На него действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Оси направлены по касательной и нормали к траектории. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{T}. \qquad (1)$$

В нижнем положении скорость шарика максимальна, и, значит, полное ускорение равно нормальному ускорению, в крайнем положении скорость обращается в нуль, и полное ускорение равно тангенциальному. Чтобы найти зависимость скорости от угла отклонения, спроектируем (1) на ось x:

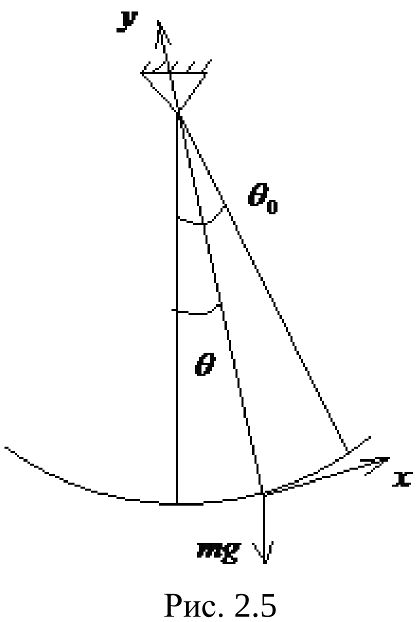


Рис. 2.5

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta. \qquad (2)$$

Учитывая, что $v = -l\dfrac{d\theta}{dt}$, выразим dt:

$dt = -l\dfrac{d\theta}{v}$, здесь l – длина нити. Тогда

$$vdv = -gl\sin\theta d\theta. \qquad (3)$$

Интегрируя с начальным условием $v(\theta) = 0$, получим:

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

или

$$v^2/l = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (4)$$

Полагая в (4) $\theta = 0$, найдем ускорение в нижней точке:

$$v^2(0)/l = 2g(1-\cos\theta_0). \qquad (5)$$

Задавая в (2) $\theta = \theta_0$, найдем ускорение в крайнем положении:

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta_0. \qquad (6)$$

Приравнивая (5) и (6) получим уравнение для определения θ_0

$$2 - 2\cos\theta_0 = \sin\theta_0. \qquad (7)$$

Откуда $tg\theta_0 = \frac{4}{3}$, $\theta_0 \approx 53°$. Уравнение (7) имеет и второй корень $\theta_0 = 0$, очевидно, что это тривиальное решение, соответствующее покоящемуся шарику.

Задачи для контроля

1. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. Угол φ между F и горизонтом меняется по закону $\varphi = ax$, где $a = const$, x – путь, пройденный из начала координат. Найти $v(x)$.

2. Небольшое тело начинает скользить с вершины клина с основанием l. Коэффициент трения между телом и клином k. При каком значении угла в основании клина α время соскальзывания минимально? Чему оно равно?

3. Материальная точка массы m движется вдоль оси x под действием $F_x = ax$, причем $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$. Найти уравнение движения точки $x(t)$ и изобразить его графически.

4. Материальная точка скользит по наклонной плоскости с углом наклона α. Коэффициент трения $k = ax$, где x – расстояние вдоль наклонной плоскости. Найти путь до остановки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при ее движении в плоскости xy по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, где A, B, ω – постоянные.

Ответ: $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы относительно начала координат; $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15°$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в $\eta = 2{,}0$ раза меньше времени спуска.

Ответ: $k = \left[(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)\right] tg\alpha = 0{,}16$.

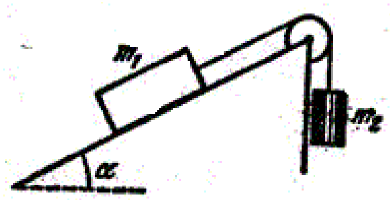


Рис. 2.6

3. В установке (рис. 2.6) известны угол α и коэффициент трения k между телом m_1 и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Найти отношение масс m_2/m_1, при котором тело m_2 начнет: а) опускаться; б) подниматься.

Ответ: а) $m_2/m_1 > \sin\alpha + k\cos\alpha$; б) $m_2/m_1 < \sin\alpha - k\cos\alpha$.

4. Наклонная плоскость (см. рис. 2.6) составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Отношение масс тел $m_2/m_1 = 2/3$. Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью $k = 0{,}10$. Массы блока и нити пренебрежимо малы. Найти модуль и направление ускорения тела m_2, если система пришла в движение из состояния покоя.

Ответ: $\vec{a}_2 = \vec{g}(\eta - \sin\alpha - k\cos\alpha)/(\eta + 1) = 0{,}05\vec{g}$.

5. Брусок массы m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k (рис. 2.7). Найти угол α, при котором натяжение нити будет наименьшим. Чему оно равно?

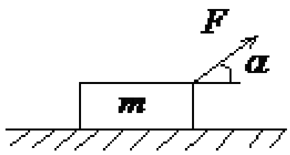


Рис. 2.7

Ответ: $tg\alpha = k$, $F_{мин} = kmg/\sqrt{1 + k^2}$.

6. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2. Кабина начинает подниматься с ускорением $\vec{a}_0$. Пренебрегая массами блока и нити, а также трением найти:

а) ускорение груза m_1 относительно кабины;

б) силу, с которой блок действует на потолок кабины.

Ответ: а) $\vec{a}_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\vec{g} - \vec{a}_0)$;

б) $\vec{F} = \dfrac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{g} - \vec{a}_0)$.

7. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A (рис. 2.8), чтобы тела 1 и 2 не двигались, относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между

бруском и обоими телами равен k. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

Ответ: $a_{мин} = g(1-k)/(1+k)$.

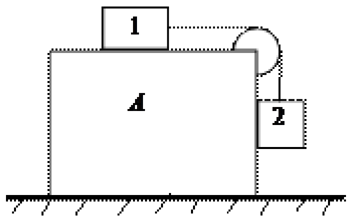


Рис. 2.8

8. На тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t=0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом (см. рис. 2.7). Найти:

а) скорость тела в момент отрыва от плоскости;

б) путь, пройденный телом к этому моменту.

Ответ: а) $v = mg^2\cos\alpha / 2k\sin^2\alpha$;   б) $s = m^2g^3\cos\alpha / 6k^2\sin^3\alpha$.

9. Частица массы m в момент $t=0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0\cos\omega t$, где $\vec{F}_0$ и ω – постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от t. Изобразить примерный график этой зависимости.

Ответ: $s = (\omega t - \sin\omega t)F_0 / m\omega^2$.

10. Катер массы m движется по озеру со скоростью v_0. В момент $t=0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера, $\vec{F} = -r\vec{v}$, найти:

а) время движения катера с выключенным двигателем;

б) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, а также полный путь до остановки.

Ответ: а) $v = v_0\exp(-tr/m)$, $t \to \infty$;   б) $v = v_0 - sr/m$, $s_{полн} = mv_0/r$.

III. Работа. Энергия. Законы сохранения

Детальное рассмотрение поведения механической системы с помощью уравнений движения часто оказывается настолько сложным, что довести решение до конца практически оказывается невозможным. В таких случаях возникает вопрос, а не существует ли каких-либо общих принципов, которые позволили бы подойти к решению подобных задач с иных позиций и позволили бы обойти существующие трудности. Такие принципы есть. Это законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Они относятся к числу фундаментальных законов природы.

Используя законы сохранения можно решить целый ряд задач, не прибегая к детальному рассмотрению с помощью уравнений движения.

Применение законов сохранения значительно упрощает решение многих задач, т. к. позволяет рассматривать только начальные и конечные состояния, не вникая в детали процессов взаимодействия.

При использовании законов сохранения необходимо проверить, выполнены ли условия их применимости.

Сводка основных формул

1. Работа силы на участке пути от точки 1 до точки 2:

$$A_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{F} d\vec{r}\,. \tag{3.1}$$

Работа в поле потенциальных сил:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{3.2}$$

где U_1 и U_2 – потенциальные энергии в точках 1 и 2.

2. Приращение кинетической энергии тела на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил действующих при этом перемещении:

$$T_1 - T_2 = A_{12}; \quad T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \tag{3.3}$$

где m – масса тела, υ, p – его скорость и импульс соответственно.

3. Полная механическая энергия:

$$E = T + U, \tag{3.4}$$

$$E_2 - E_1 = A_{ст}\,. \tag{3.5}$$

Приращение полной механической энергии тела на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сторонних сил.

4. Закон сохранения механической энергии справедлив в инерциальной системе отсчета: в поле консервативных сил механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U = const. \tag{3.6}$$

5. В инерциальной системе отсчета импульс замкнутой системы тел остается постоянным при любых взаимодействиях внутри системы:

$$\sum \vec{P}_i(t) = const. \tag{3.7}$$

Примеры решения задач

Задача 1. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = a\sqrt{s}$, где a – постоянная, s – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

$v = a\sqrt{s}$
$a = const$
t
$A(t) - ?$

В данной задаче требуется найти работу сил, действующих на локомотив, причем силы не заданы. Для решения воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии.

В начальный момент времени $s = 0$ и, следовательно, $T_1 = 0$, в момент времени t путь, пройденным телом $s(t)$ и кинетическая энергия:

$$T_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2 s}{2}. \tag{1}$$

Таким образом, суммарная работа всех сил, как функция пройденного пути, есть:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{ma^2 s}{2}. \tag{2}$$

Однако в задаче требуется найти работу как функцию времени, то есть теперь задача сводится к задаче кинематики, когда скорость задана как функция пройденного пути и нужно найти ее, как функцию времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = a\sqrt{s}. \tag{3}$$

Отсюда $s = \frac{a^2 t^2}{4}$ и $v = \frac{a^2 t}{2}$. Подставляя найденную зависимость в (2), получим:

$$A = \frac{ma^4 t^2}{8}. \tag{4}$$

Таким образом, зная зависимость скорости от пройденного пути и не имея никакой информации о действующих силах, применяя теорему об изменении кинетической энергии, нашли суммарную работу всех сил, действующих на локомотив.

Задача 2. Летевшая горизонтально пуля массы m попала, застряв в тело массы M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины l. В результате нити отклонились на угол θ. Найти скорость пули перед попаданием в тело.

M,
m
θ, l
$v - ?$

Будем считать систему пуля – тело замкнутой (время взаимодействия предполагается малым по сравнению со временем отклонения на максимальный угол от положения равновесия, сила тяжести компенсируется силами натяжения), тогда справедлив закон сохранения импульса:

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V}, \qquad (1)$$

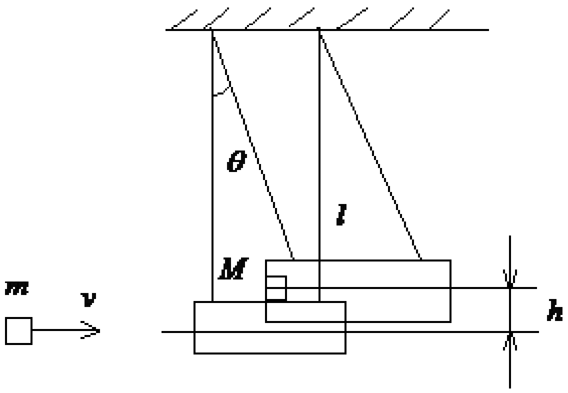


Рис. 3.1

здесь $\vec{v}$ – скорость пули перед попаданием в тело; $\vec{V}$ – скорость тела вместе с пулей непосредственно после взаимодействия. Переписав (1) в проекции на направление движения пули, получим:

$$v = \frac{M + m}{m} V. \qquad (2)$$

Скорость V найдем из закона сохранения энергии при движении тела вместе с пулей в поле тяготения:

$$\frac{(M + m)V^2}{2} = (M + m)gh), \; V = \sqrt{2gh}. \qquad (3)$$

Высоту h найдем из рисунка 3.1:

$$h = l(1 - \cos\theta) = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и затем полученный результат в (2) найдем:

$$v = 2\frac{m + M}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) видно, что угол отклонения тем меньше, чем больше масса тела по сравнению с массой пули. При $M >> m$:

$$v = 2\frac{M}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\theta}{2}.$$

<u>Задача 3.</u> Частица 1, летевшая со скоростью v_0, испытала абсолютно упругое столкновение с покоящейся частицей 2 (рис. 3.2). Найти отношение их масс, если столкновение лобовое и частицы разделились в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями.

$\vec{v}_0$
$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$
$m_2/m_1 - ?$

Считая систему замкнутой, применим закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

По условию,

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2,\ |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v. \tag{1}$$

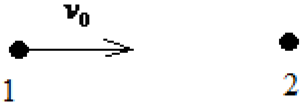


Рис. 3.2

Тогда, в проекции на направление $\vec{v}_0$:

$$m_1 v_0 = (m_2 - m_1)v. \tag{2}$$

Поскольку взаимодействие абсолютно упругое, справедлив закон сохранения механической энергии, который с учетом (1) имеет вид:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2},$$

или

$$m_1 v_0^2 = (m_1 + m_2)v^2. \tag{3}$$

Возведем обе части равенства (2) в квадрат и результат почленно разделим на (3):

$$m_1 = \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_2 + m_1}, \qquad \text{или} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)^2.$$

Откуда

$$\frac{m_2}{m_1} = 3.$$

<u>Задача 4.</u> Небольшая шайба массы m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой h и попадает на доску M, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 3.3). Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, начиная с некоторого момента времени, движется вместе с доской как единое целое. Найти суммарную работу сил трения в этом процессе.

m
M
h
$A_{ðð} - ?$

Когда шайба скользит с горки, ее скорость увеличивается и становится максимальной у основания горки непосредственно, перед тем как попасть на доску. Из закона сохранения энергии $mgh = \frac{mv_0^2}{2}$ (т. к. горка гладкая), получим

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

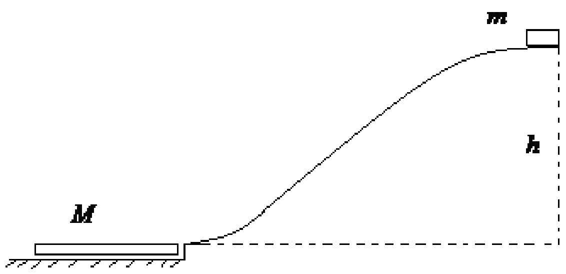


Рис. 3.3

Когда шайба попадает на доску, вследствие трения часть кинетической энергии идет на совершение работы против сил трения. Импульс системы, т. к. доска лежит на гладкой плоскости, сохраняется (аналогия с неупругим ударом):

$$\begin{cases} mv_0 = (M+m)v_k \\ \dfrac{mv_k^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = A_{тр} \end{cases}. \tag{2}$$

Закон сохранения импульса записан сразу в скалярной форме, т. к. $v_0 \| v_k$. Второе уравнение системы (2) есть аналитическое выражение теоремы об изменении кинетической энергии. Из первого уравнения системы (2) найдем v_k:

$$v_k = \frac{m}{m+M} v_0. \tag{3}$$

Подставляя (3) во второе уравнение системы (2) и используя v_0 выражение (1) получим:

$$A_{тр} = \frac{m^2 gh}{m+M} - mgh = -\frac{Mm}{M+m} gh. \tag{4}$$

Из (4) видно, что при $M >> m$ вся кинетическая энергия шайбы пойдет на совершение работы и в конечном состоянии система доска – шайба будет покоиться. Это еще раз подтверждает аналогию с неупругим взаимодействием.

<u>**Задача 5.**</u> Потенциальная энергия частицы $U = \chi r^2/3$. Найти силу, действующую на частицу, а также ее работу при перемещении из точки $(\sqrt{3},2,3)$ в точку $(1,\sqrt{5},\sqrt{3})$. Здесь r – модуль радиус-вектора частицы. Все величины заданы в системе СИ.

$U = \chi r^2/3$
$r_1 = (\sqrt{3},2,3)$
$r_2 = (1,\sqrt{5},\sqrt{3})$
―――
$F - ?$
$A_F - ?$

В поле потенциальных сил:

$$\vec{F} = -gradU. \tag{1}$$

Учитывая сферическую симметрию задачи, будем иметь отличную от нуля только радиальную составляющую силы. Тогда вместо (1) можем записать:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2}{3}\chi r. \tag{2}$$

Заметим, что эквипотенциальные поверхности – сферы, а сила направлена по радиусу к центру поля.

Чтобы найти работу силы, воспользуемся формулой (3.2)

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

или

$$A_{12} = \frac{1}{3}\chi\left(r_1^2 - r_2^2\right). \qquad (3)$$

Подставляя в (3) численные значения r_1^2 и r_2^2, найдем:

$$A_{12} = \frac{7\chi}{3} \text{ Дж.}$$

<u>Задача 6.</u> Тело массы m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$. Найти мгновенную мощность, развиваемую силой F.

$\vec{F} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$
$v(0) = 0$
$P(t) - ?$

Мощность, развиваемая силой, есть:

$$P(t) = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \qquad (1)$$

Чтобы воспользоваться выражением (1) необходимо найти скорость. Учитывая, что $F = mw$, можем легко найти ускорение:

$$w(t) = \frac{1}{m}\left(3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}\right). \qquad (2)$$

Решая обратную задачу кинематики, т. е. интегрируя (2) по времени с учетом того, что $v(0) = 0$, получим

$$\vec{v}(t) = \frac{3}{2m}t^2\vec{i} + \frac{2}{3m}t^3\vec{j}. \qquad (3)$$

Подставляя в (1) силу $\vec{F}$ и выражение для скорости $\vec{v}$, окончательно найдем:

$$P = \left(F_x v_x + F_y v_y\right) = \frac{t^3}{m}\left(\frac{9}{2} + \frac{4}{3}t^2\right).$$

<u>Задача 7.</u> Тело массой M соскальзывает без начальной скорости с гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда тело прошло путь s, в него попала летевшая горизонтально пуля массы m. Найти скорость пули, если сразу после удара тело остановилось.

M,
m
α, s
$v_n - ?$

Наклонная плоскость гладкая, следовательно, на пути s на тело действует только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Но $\vec{N}$ перпендикулярна направлению движения и работы не совершает, а сила тяжести – консервативная.

Значит, для определения скорости тела в момент попадания в него пули можем воспользоваться законом сохранения механической энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh = Mgs\sin\alpha . \tag{1}$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2gs\sin\alpha} , \tag{2}$$

здесь учтено, что тело начинает скользить без начальной скорости.

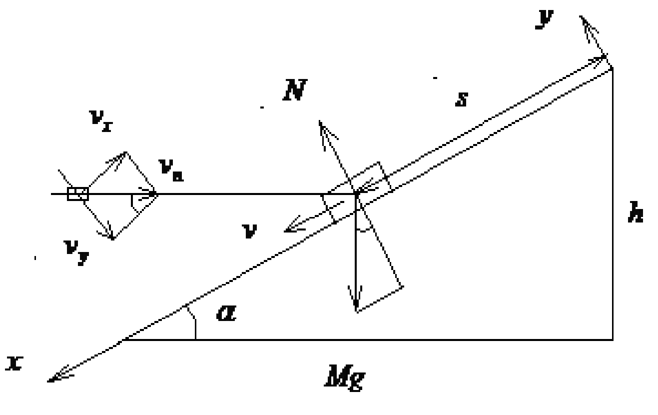


Рис. 3.4

Силы, действовавшие на тело вдоль оси y (направление осей указано на рис. 3.4) до попадания пули уравновешивались, т. е. $N = Mg\cos\alpha$, а вдоль оси x действовала сила $Mg\sin\alpha$, которая и вызывала ускоренное движение тела.

При взаимодействии пули с телом, тело не перемещается вдоль оси y, хотя пуля имеет составляющую импульса в этом направлении. Значит, сила реакции $\vec{N}$ увеличивается, чтобы импульс этой силы был равен изменению импульса пули вдоль оси y. Среднее значение этой силы обратно пропорционально времени взаимодействия пули и тела. Проекция импульса на ось y не сохраняется.

В проекции на ось x будем иметь:

$$\int_{P_{xн}}^{P_{xк}} dP_x = \int_0^t F_x dt . \tag{3}$$

Не сохраняется проекция импульса и на ось x, т. к. сила тяжести имеет составляющую в этом направлении. Но импульс силы тяжести стремится к нулю, если время взаимодействия стремится к нулю, т. к.

$$\int_0^t Mg\sin\alpha dt = Mg\sin\alpha\Delta t \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0 .$$

Считая, что время взаимодействия достаточно мало (настолько, чтобы можно было пренебречь соответствующим импульсом силы), из (3) получим $P_{xк} - P_{xн} = 0$ или, учитывая, что после взаимодействия тела остановились, т. е. $P_{xк} = 0$, найдем, что и $P_{xн} = 0$. Но

$$P_{xн} = M\sqrt{2gs\sin\alpha} - mv_n\cos\alpha = 0 .$$

Откуда

$$v_n = \frac{M}{m}\sqrt{2gs\frac{tg\alpha}{\cos\alpha}}. \qquad (4)$$

Легко понять, что после остановки тело снова начнет двигаться, т. к. составляющая силы тяжести на направление движения продолжает действовать.

В рассмотренной задаче закон сохранения импульса или его проекций не выполняется точно. Но если импульс силы стремится к нулю при стремлении к нулю времени взаимодействия, то им можно пренебречь по сравнению с импульсом системы. На практике такие ситуации случаются часто: например, снаряд разрывается в воздухе на части, тела сталкиваются на наклонной плоскости и т. д.

Задачи для контроля

1. Пуля массой m попадает в баллистический маятник (подвешенный на нити ящик с песком) массой M, где и застревает. При этом маятник отклоняется от вертикали так, что поднимается на некоторую высоту h. Найти скорость пули в момент удара.

2. Тело массой 2 кг движется со скоростью 3 м/с и нагоняет второе тело, движущееся со скоростью 1 м/с. Удар – центральный и упругий. Найти массу второго тела, если первое тело после удара остановилось.

3. Тело массой M соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона которой φ. После того, как тело прошло путь S, с ним неупруго сталкивается летящий горизонтально пластилиновый шар массой m. При этом тело останавливается. Найти скорость шара.

4. В результате упругого лобового столкновения частицы 1 массой m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2.

5. Тело массы m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$. Найти мощность, развиваемую силой в момент времени t.

6. На частицу массы m действует сила $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Она переместилась из точки $(2,4,6)$ в точку $(3,6,9)$. Найти кинетическую энергию частицы в конечном состоянии, если ее начальная скорость $v_0 = 0$.

7. Потенциальная энергия частицы $U = kr^2/2$. Найти силу, действующую на частицу, а также ее работу при перемещении из точки $(1,2,3)$ в точку $(2,3,4)$. Здесь r – модуль радиус-вектора точки.

8. Потенциальная энергия частицы массы m: $U = x + 2y^2 - 3z^2$. Найти работу сил поля при перемещении частицы из точки $(1,1,1)$ в точку $(2,2,3)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Плот массы M с находящимся на нем человеком массы m неподвижно стоит на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение $\vec{l}\,'$ со скоростью $\vec{v}\,'(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

а) перемещение $\vec{l}$ плота относительно берега;

б) горизонтальную составляющую силы, с которой человек действовал на плот в процессе движения.

Ответ: а) $\vec{l} = -[m/(M+m)]\vec{l}\,'$, б) $\vec{F} = -[mM/(M+m)]d\vec{v}\,'/dt$.

2. Через блок перекинута веревка, на одном конце которой висит лестница с человеком, а на другом конце – уравновешивающий груз массы M. Человек массы m совершил перемещение $\vec{l}\,'$ относительно лестницы вверх и остановился. Пренебрегая массами блока и веревки, а также трением в оси блока, найти перемещение $\vec{l}$ центра масс этой системы.

Ответ: $\vec{l} = m\vec{l}\,'/2M$.

3. Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти ее скорость $\vec{v}$ и модуль v, если масса у частицы 2 в $\eta = 2{,}0$ раза больше, чем у частицы 1, а их скорости перед столкновением равны $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, где компоненты скорости даны в СИ.

Ответ: $\vec{v} = (\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2)/(1+\eta)$; $v = 4$ м/с.

4. Ствол пушки направлен под углом $\theta = 45°$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки, $v_0 = 180$ м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить.

Ответ: $u = v_0 \cos\theta/(1+\eta) = 25$ м/с.

5. Цепочка массы $m = 1{,}00$ кг и длины $l = 1{,}40$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти импульс, который она передала столу.

Ответ: $p = (2m/3)\sqrt{2gl} = 3{,}5$ кг м/с.

6. Небольшое тело массы m медленно втащили на горку, действуя силой $\vec{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории

(рис. 3.5). Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения k.

Ответ: $A = mg(h + kl)$.

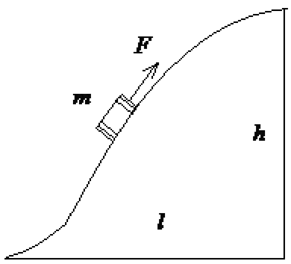


Рис. 3.5

7. Шайба массы $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ сгоризонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $k = 0{,}15$.

Ответ: $A = -kmgl/(1 - kctg\alpha) = -0{,}05$ Дж.

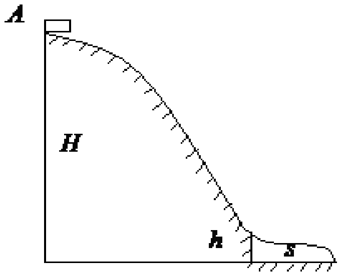


Рис. 3.6

8. Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 3.6). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние s? Чему оно равно?

Ответ: $h = H/2$; $s_{max} = H$.

9. Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$ (рис. 3.7). Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба).

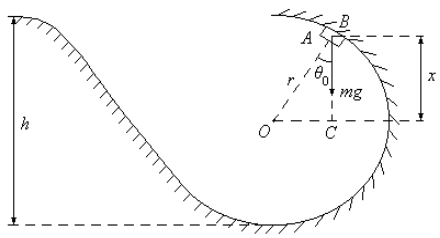


Рис. 3.7

Ответ: $v = 2\sqrt{gh/27}$.

10. Замкнутая система состоит из двух одинаковых частиц, которые движутся со скоростями v_1 и v_2 так, что угол между направлениями их движения равен θ. После упругого столкновения скорости частиц оказались равными v_1' и v_2'. Найти угол θ' между направлениями их разлета.

Ответ: $\cos\theta' = (v_1 v_2 / v_1' v_2')\cos\theta$.

11. Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M, в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом $\theta = 30°$ к первоначальному направлению движения частицы m. На сколько процентов, и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $M/m = 5{,}0$?

Ответ: $\Delta T/T = (1 + m/M)tg^2\theta + m/M - 1 = 40$ %.

IV. Динамика твердого тела

Вращательное движение твердого тела описывается уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{4.1}$$

где $\vec{L}$ – момент импульса тела относительно точки O, $\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i \vec{F}_i\right]$ – суммарный момент сил относительно той же точки.

Из уравнения (4.1) следует, что если $\vec{M} \equiv 0$ то

$$\vec{L} = const, \tag{4.2}$$

т. е. если относительно некоторой выбранной точки O суммарный момент всех сил, действующих на частицу равен нулю, то относительно этой точки момент импульса сохраняется.

Моментом импульса (силы) относительно оси z называют проекцию на эту ось вектора $\vec{L}$ $\left(\vec{M}\right)$, определенного относительно произвольной точки данной оси. Спроектировав (4.1) на ось z, получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{4.3}$$

Для абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно написать:

$$L_z = I\omega_z, \tag{4.4}$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения:

$$I = \int\limits_{(V)} r^2 dm, \tag{4.5}$$

Здесь интегрирование ведется по всему объему тела.

Если известен момент инерции тела I_0 относительно оси проходящей через его центр масс, то, воспользовавшись теоремой Гюйгенса-Штейнера, можно найти момент инерции этого тела относительно произвольной оси, параллельной данной:

$$I = I_0 + ma^2. \tag{4.6}$$

Здесь a – расстояние между осями.

Если ось не изменяет ориентации относительно тела, $I = const$ и тогда (4.3) можно переписать в виде:

$$I\varepsilon_z = M_z, \tag{4.7}$$

где ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения.

Движение твердого тела в общем случае описывается двумя уравнениями: одно из них уравнение движения центра масс, другое – уравнение моментов в системе отсчета связанной с центром масс:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt}=\sum\vec{F}_i\,; \qquad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}\,. \tag{4.8}$$

Методы решения задач динамики вращательного движения твердого тела во многом совпадают с методами решения задач динамики поступательного движения. При этом полезно пользоваться таблицей аналогов:

Характеристики поступательного движения	Характеристики вращательного движения	Связь между линейными и угловыми характеристиками движения
Путь s	Угол поворота φ	$s=\varphi r$
Скорость $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$	Угловая скорость $\vec{\omega}=\dot{\vec{\varphi}}$	$\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]$
Ускорение $\vec{w}=\dot{\vec{v}}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}$	$\vec{w}_\tau=[\vec{\varepsilon},\vec{r}]$, $\vec{w}_n=\omega^2 r\vec{n}$
Масса m	Момент инерции I	$I=\int\limits_{(m)} r^2dm$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$	$\vec{M}=[\vec{r},\vec{F}]$
Импульс $\vec{P}=m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L}=I\vec{\omega}$	$\vec{L}=[\vec{r},\vec{P}]$
Уравнение движения $\dot{\vec{P}}=\vec{F}$ или $m\vec{w}=\vec{F}$	Уравнение моментов $\dot{\vec{L}}=\vec{M}$ или $I\vec{\varepsilon}=\vec{M}$	–
Закон сохранения импульса $\sum\limits_i\vec{P}_i=const$ или $\sum\limits_i m_i v_i=const$	Закон сохранения момента импульса $\sum\limits_i\vec{L}_i=const$ $\sum\limits_i I_i\vec{\omega}_i=const$	–
Работа силы $A=\int F_s ds$	Работа момента силы $A=\int M_z d\varphi$	–
Мощность $N=\vec{F}\vec{v}$	Мощность $N=\vec{M}\vec{\omega}$	–
Кинетическая энергия $E_{ê}=\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{p^2}{2m}$	Кинетическая энергия $E_{ê}=\dfrac{I\omega^2}{2}=\dfrac{L^2}{2I}$	–

Приведем моменты инерции некоторых тел, наиболее часто встречающихся в задачах:

а) однородного стержня длины l и массы m, относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню:

$$I = \frac{1}{12} m l^2, \tag{4.9}$$

б) диска и круглого цилиндра радиуса R и массы m, относительно их осей симметрии:

$$I = \frac{1}{2} m R^2, \tag{4.10}$$

в) тонкого кольца и тонкостенной трубы радиуса R и массы m, относительно их осей симметрии:

$$I = m R^2, \tag{4.11}$$

г) шара радиуса R и массы m, относительно оси, совпадающей с его диаметром:

$$I = \frac{2}{5} m R^2. \tag{4.12}$$

При движении тел без проскальзывания возможны два подхода к решению задач.

1. Рассматривают движение тела вокруг мгновенной оси и записывают уравнение моментов (4.7) относительно этой оси (напомним, что в этом случае мгновенная ось проходит через точки соприкосновения тела с поверхностью, по которой оно катится).

2. Рассматривают общий случай движения твердого тела, используя уравнение (4.8).

Следует помнить, что движение без проскальзывания возможно только при наличии силы трения.

Примеры решения задач

<u>Задача 1.</u> К точке с радиус-вектором $\vec{r}_1 = a\vec{i}$ приложена сила $\vec{F}_1 = A\vec{j}$, а к точке с $\vec{r}_2 = b\vec{j}$, сила $\vec{F}_2 = B\vec{i}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y, a, b, A, B – постоянные. Найти плечо равнодействующей силы относительно начала координат O.

$\vec{r}_1 = a\vec{i}$, $\vec{F}_1 = A\vec{j}$
$\vec{r}_2 = b\vec{j}$, $\vec{F}_2 = B\vec{i}$
$a, b, A, B = const$

$d - ?$

Напомним, что плечом силы называется расстояние от полюса до линии действия силы, причем

$$M = F \cdot d \quad \text{или} \quad d = \frac{M}{F}. \tag{1}$$

Таким образом, чтобы найти d, необходимо найти модули суммарного момента сил действующих на тело и модуль равнодействующей силы. Начнем с момента силы. По определению

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right],$$

или

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b & 0 \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = (aA - bB)\vec{k}.$$

Момент силы направлен вдоль оси z, что естественно, т. к. приложенные силы лежат в плоскости XOY.

$$M = \left|\vec{M}\right| = |aA - bB|. \tag{2}$$

Равнодействующая сила есть

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = B\vec{i} + A\vec{j}, \\ F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1) найдем:

$$d = \frac{|aA - bB|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

<u>Задача 2.</u> Найти момент инерции тонкой однородной пластинки относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через одну из ее вершин, стороны пластинки равны a и b, масса – m.

a
b
m
I-?

Выберем систему координат как показано на рисунке 4.1. Выделим элементарную массу в виде прямоугольника со сторонами dx и dy и, введем, с учетом того, что пластинка тонкая, поверхностную плотность массы $\rho = m/ab$, тогда:

$$dm = \rho ds = \frac{m}{ab} dxdy. \tag{1}$$

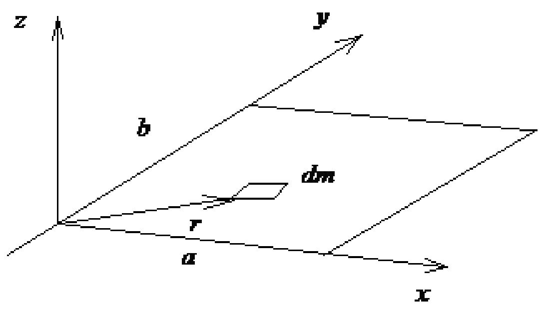


Рис. 4.1

Момент инерции этой массы, по определению, равен

$$dI_z = r^2 dm = \frac{m}{ab}\left(x^2 + y^2\right)dxdy. \tag{2}$$

Чтобы найти момент инерции всей пластины, необходимо проинтегрировать выражение (2) по x в пределах от 0 до a и по y – от 0 до b, соответственно.

$$I_z = \int_0^a \int_0^b \left(x^2 + y^2\right)\frac{m}{ab}dxdy\,.$$

Выполняя интегрирование, получим:

$$I_z = \frac{1}{3}m\left(a^2 + b^2\right).$$

Таким образом, момент инерции пластинки равен сумме моментов инерции двух взаимно перпендикулярных стержней длины a и b массой m каждый.

Задача 3. На однородный сплошной цилиндр массой m_1 и радиуса R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массы m (рис. 4.2). В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра найти зависимость от времени:

а) ускорение груза;

б) модуля угловой скорости цилиндра;

в) кинетической энергии всей системы.

m_1
R
m
$w - ?$
$\omega - ?$
$E_k - ?$

Поскольку нить легкая, пренебрежем ее моментом инерции по сравнению с моментом инерции цилиндра. Т. к. нить намотана плотно, т. е. движется без проскальзывания, ее линейное ускорение, а, следовательно, и линейное ускорение груза, равно линейному ускорению точек, лежащих на образующих цилиндра. Для ответа на первые два вопроса воспользуемся уравнением моментом (4.1) в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}\,, \qquad (1)$$

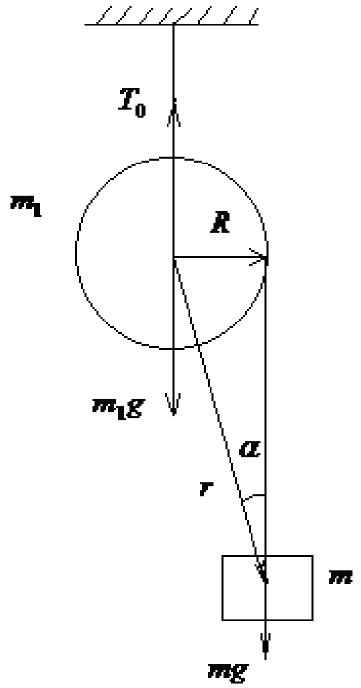


Рис. 4.2

здесь $\vec{L}$ – полный момент импульса системы цилиндр-груз, $\vec{M}_{внеш}$ – суммарный момент внешних сил, действующих на систему, причем:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} + \left[\vec{r}m\vec{v}\right]. \qquad (2)$$

В проекции на ось вращения получим:

$$L_z = I\omega + mvr\sin\alpha\,.$$

Учитывая, что $r\sin\alpha = R$ в любой момент времени и что $v = \omega R$ – нить не проскальзывает, запишем

$$L = I\omega + mR^2\omega = \left(m_1/2 + m\right)R^2\omega\,. \qquad (3)$$

Из трех внешних сил, действующих на систему (рис. 4.2.), только момент силы тяжести, действующий на груз, отличен от нуля, две другие силы проходят через ось вращения.

$$M^{z}_{внеш} = rmg\sin\alpha = mgR. \tag{4}$$

Проектируя (1) на ось вращения и подставляя в полученное уравнение выражения (3) и (4) будем иметь:

$$\left(\frac{1}{2}m_1 + m\right)R\frac{d\omega}{dt} = mg. \tag{5}$$

Откуда

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2mg}{(m_1 + 2m)R}. \tag{6}$$

Линейное ускорение груза, как было указано выше, есть

$$w = \varepsilon R = \frac{2mg}{m_1 + 2m}. \tag{7}$$

Выражение (7) показывает, что $w = const$. Чтобы найти $\omega(t)$ необходимо в (6) разделить переменные и проинтегрировать с учетом начальных условий (система пришла в движение при $t = 0$):

$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{2mg}{(m_1 + 2m)R}\int_0^{t} dt,$$

или

$$\omega = \frac{2mgt}{(m_1 + 2m)R} = \frac{gt}{R(1 + m_1/2m)}. \tag{8}$$

Для определения кинетической энергии системы учтем, что цилиндр вращается, а груз движется поступательно, т. е.:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Вспоминая, что $I = \dfrac{m_1R^2}{2}$ и $v = \omega R$, получим

$$E_k = \frac{m_1R^2\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (9) и выполняя элементарные преобразования, найдем

$$E_k = \frac{mg^2t^2}{2\left(1 + \dfrac{m_1}{2m}\right)}. \tag{10}$$

Выражения (7), (8) и (10) дают решение задачи.

Заметим, что задачу можно было решать иначе, записав уравнение движения каждого тела в отдельности: вращательного движения цилиндра и поступательного движения груза. При таком подходе необходимо было

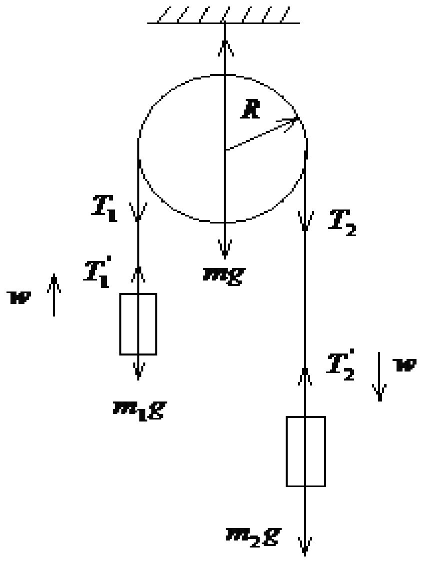


Рис. 4.3

бы ввести в рассмотрение силу натяжения нити, к которой привязан груз. Такой подход продемонстрируем на примере следующей задачи.

Задача 4. В установке, показанной на рис. 4.3, известны масса однородного сплошного цилиндра m, его радиус R и массы тел m_1 и m_2 $(m_2 > m_1)$. Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение сил натяжения T_1/T_2 вертикальных участков нити в процессе движения. Массой нити пренебречь.

m, R
m_1, m_2
$m_2 > m_1$
$\varepsilon - ?$
$T_1/T_2 - ?$

На рис. 4.3 изображены все силы, действующие в системе, причем из невесомости нити следует, что

$$\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|; \quad \left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right|.$$

Запишем уравнение движения для каждого тела системы:

$$\begin{cases} I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \\ m_1\vec{w}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1' \\ m_2\vec{w}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2' \end{cases}. \qquad (1)$$

Первое уравнение спроектируем на ось вращения, которая направлена за чертеж, два других спроектируем на направления ускорения (см. Раздел II. Динамика материальной точки):

$$M_z = (T_2 - T_1)R.$$

Моменты сил mg и T_0 равны нулю, т. к. они проходят через ось вращения. Таким образом, вместо (1) получим:

$$\begin{cases} I\varepsilon = \frac{1}{2}mR^2\varepsilon = (T_2 - T_1)R \\ m_1\varepsilon R = T_1' - m_1 g \\ m_2\varepsilon R = m_2\vec{g} - T_2' \end{cases}. \qquad (2)$$

Здесь учтено, что $|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2| = w = \varepsilon R$, т. к. нить движется без проскальзывания (см. предыдущую задачу).

Складывая почленно левые и правые части уравнений системы (2), найдем:

$$\left(\frac{1}{2}m + m_1 + m_2\right)R\varepsilon = (m_2 - m_1)g,$$

или

$$\varepsilon = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(\frac{1}{2}m + m_1 + m_2\right)R}. \qquad (3)$$

Выражая из второго и третьего уравнений системы (2) силы натяжения, будем иметь:

$$T_1 = m_1(R\varepsilon + g),$$
$$T_2 = m_2(g - R\varepsilon).$$

Беря их отношение и подставляя ε из выражения (3), после несложных преобразований окончательно получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{m + 4m_2}{m + 4m_1}. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что при $m \to 0$ (невесомый блок) $T_1 = T_2$.

<u>Задача 5.</u> Вертикально расположенный стержень массы M и длины l может вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попала, застряв горизонтально, летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклонился на угол α. Найти скорость летевшей пули, считая $m << M$.

M, l
m, α
$v - ?$

Система пуля – стержень не замкнута. Будем считать, что время движения пули в стержне (время взаимодействия) мало, т. е. за это время стержень практически не успевает заметно сместиться. Тогда все силы, действующие на систему (сила тяжести и сила реакции в подвесе) будут проходить через точку O и их моменты будут равны нулю, следовательно, момент импульса системы относительно любой оси, проходящей через точку O, будет оставаться постоянным. Выберем ось перпендикулярно плоскости рисунка. В проекции на эту ось можем записать:

$$mvl = I\omega. \qquad (1)$$

Здесь слева момент импульса пули до попадания в стержень, справа – момент импульса стержня сразу после взаимодействия. Мы учли, что $m << M$ и в правой части равенства (1) пренебрегли моментом импульса пули после взаимодействия по сравнению с моментом импульса стержня.

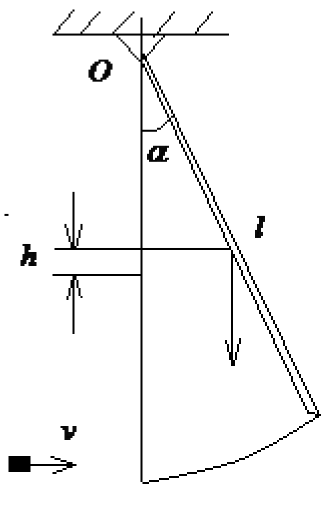


Рис. 4.4

После взаимодействия стержень движется в консервативном поле тяготения и, следовательно, можем воспользоваться законом сохранения механической энергии. Кинетическая энергия стержня в начальный момент, перейдет в его потенциальную энергию в момент максимального отклонения от положения равновесия, причем потенциальную энергию определим по изменению положения центра масс стержня:

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = Mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Здесь мы опять учли, что $m << M$. Напомним, что $I = ml^2/3$. Из (2) легко найти угловую скорость движения стержня сразу после взаимодействия:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и решая полученное уравнение относительно v, окончательно найдем:

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Задача 6. Однородное кольцо массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти линейное ускорение его геометрического центра.

m
R
$w_{ñ} - ?$

Продемонстрируем на примере этой задачи оба подхода к рассмотрению плоского движения, изложенные в предисловии к данному разделу.

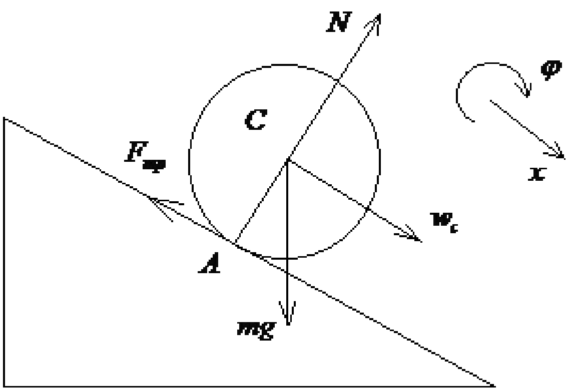


Рис. 4.5

1 способ. Используем уравнение моментов относительно мгновенной оси, проходящей через точку A. Расставим все силы, действующие на кольцо: сила тяжести (обратим внимание, что точка приложения этой силы – геометрический центр кольца не принадлежит рассматриваемому телу), сила реакции опоры и сила трения. Последние две силы проходят через ось вращения и, следовательно, их моменты равны нулю. Направление оси x и положительное направление отсчета угла поворота показаны на рисунке. Тогда:

$$I_A\frac{d\omega}{dt} = M_A. \qquad (1)$$

Здесь $I_A = I_C + mR^2$, $M_A = mgR\sin\alpha$. Скорость центра масс в общем случае равна $v_C = v_A + \omega R$, т. к. проскальзывания нет $v_A = 0$, т. е. $v_C = \omega R$, ускорение $w_C = \frac{dv_C}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$. Таким образом:

$$\left(I_C + mR^2\right)\frac{d\omega}{dt} = mgR\sin\alpha, \tag{2}$$

или

$$w_C = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR^2\sin\alpha}{I_C + mR^2} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I_C}{mR^2}}. \tag{3}$$

По условию кольцо однородное: $I_C = mR^2$ и

$$w_C = \frac{1}{2}g\sin\alpha. \tag{4}$$

При таком подходе нам не потребовалось ни реакция опоры, ни сила трения.

<u>*2 способ.*</u> Воспользуемся уравнениями (4.8), т. е. запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс и уравнение движения центра масс:

$$\begin{cases} I_C\frac{d\omega}{dt} = M_C = RF_{тр} \\ m\frac{dv_C}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} \end{cases}. \tag{5}$$

Здесь мы учли, что только сила трения имеет ненулевой момент, а уравнение движения центра масс сразу спроектировали на ось x. Решая систему (5), с учетом того, что $w = \frac{dv_C}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$, вновь получим:

$$w_C = g\sin\alpha \Big/ \left(1 + \frac{I_C}{mR^2}\right). \tag{3'}$$

Отметим, что такой подход позволяет найти силу трения. Подставляя (3') во второе уравнение (5), найдем:

$$F_{тр} = \frac{I_C}{I_C + mR^2}mg\sin\alpha, \tag{6}$$

или, т. к. кольцо однородное:

$$F_{тр} = \frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

Задачи для контроля

1. Маховик радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 10$ кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Натяжение ремня, идущего без скольжения, постоянно и равно $T = 14{,}7$ Н. Какое число оборотов в секунду будет делать маховик через $t = 10$ с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

2. На барабан радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $I = 0{,}1 кг \cdot м^2$, намотан шнур, к которому привязан груз $P_1 = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота груза P_1 над полом равна $h_1 = 1$ м. Найти:

а) через сколько времени груз опустится до пола;

б) кинетическую энергию груза в момент удара о пол;

в) натяжение нити. Трением пренебречь.

3. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого равен $I = 50\, кг \cdot м^2$ и радиус $R = 20$ см. Блок вращается с трением и момент сил трения $M_{тр} = 98{,}1\, Н \cdot м$. Найти разность сил натяжения нити $T_1 - T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2{,}36$ рад/с^2.

4. Медный шар радиуса $R = 10$ см вращается со скоростью, соответствующей $n = 2$ об/сек, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое?

Задачи для самостоятельного решения

1. Однородный шар массы $m = 4{,}0$ кг движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы $\vec{F}$, приложенной, как показано на рис. 4.6, где угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между шаром и столом $k = 0{,}20$. Найти F и ускорение шара.

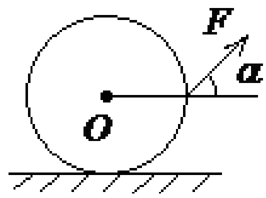


Рис. 4.6

Ответ: $F = \dfrac{kmg}{(1+k)\sin\alpha} = 13$ Н, $a = \dfrac{kg}{1+k}(ctg\alpha - 1) = 1{,}2$ м/с^2.

2. Тонкая однородная пластинка массы $m = 0{,}60$ кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого $a = 200$ мм.

Ответ: $I = ma^2/6 = 4{,}0\, г \cdot м^2$.

3. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом a и массы m относительно оси, совпадающей с его диаметром.

Ответ: $I = ma^2/2$.

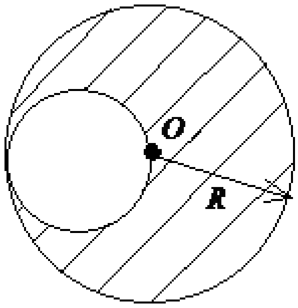


Рис. 4.7

4. Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез (рис. 4.7). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей:

а) через точку O;

б) через его центр масс.

Ответ: а) $I_O = (13/24)mR^2$, б) $I_C = (37/72)mR^2$.

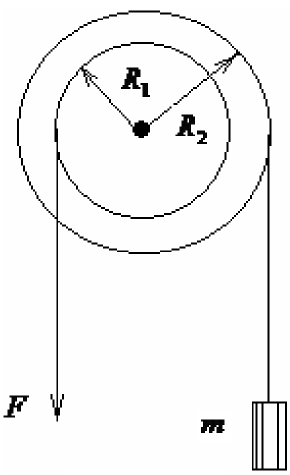


Рис. 4.8

5. На ступенчатый блок (рис. 4.8) намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной нити действуют постоянной силой $\vec{F}$, а к концу другой нити прикреплен груз массы m. Известны радиусы R_1 и R_2 блока и его момент инерции I относительно оси вращения. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

Ответ: $\beta_z = (mgR_2 - FR_1)/(I + mR_2^2)$, где ось z направлена за плоскость рисунка 4.8.

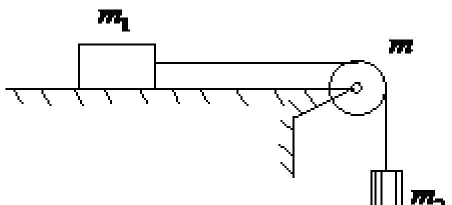


Рис. 4.9

6. В системе, показанной на рис. 4.9, известны массы тел m_1 и m_2, коэффициент трения k между телом m_1 и горизонтальной плоскостью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. Скольжения нити по блоку нет. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти:

а) ускорение тела m_2;

б) работу силы трения, действующей на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.

Ответ: а) $a = g\dfrac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 - m/2}$, б) $A = -\dfrac{(m_2 - km_1)km_1 g^2 t^2}{m + 2(m_1 + m_2)}$.

7. Человек массы m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массы m_2 и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг

неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ' относительно диска и остановился. В процессе движения скорость человека относительно диска зависела от времени по закону $v'(t)$. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

Ответ: $\varphi = -2m_1\varphi'/(2m_1 + m_2)$.

8. На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массы m (рис. 4.10). Ее момент инерции относительно собственной оси $I = \gamma m R^2$, где γ – числовой коэффициент, R – внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r. Катушку без скольжения начали тянуть за нить с постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Найти:

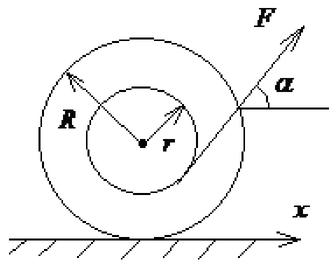


Рис. 4.10

а) проекцию на ось x ускорения оси катушки;

б) работу силы $\vec{F}$ за первые t секунд движения.

Ответ: а) $a_x = \dfrac{F(\cos\alpha - r/R)}{m(1+\gamma)}$, б) $A = \dfrac{F^2t^2(\cos\alpha - r/R)^2}{2m(1+\gamma)}$.

9. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2, а угловые скорости – $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. После падения верхнего диска на нижний, оба диска, благодаря трению между ними, начали через некоторое время вращаться как единое целое. Найти:

а) установившуюся угловую скорость вращения дисков;

б) работу, которую совершили при этом силы трения.

Ответ: а) $\vec{\omega} = (I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2)/(I_1 + I_2)$, б) $A = -[I_1 I_2/2(I_1 + I_2)](\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)^2$

10. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол (рис. 4.11). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен k. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

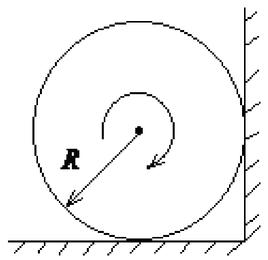


Рис. 4.11

Ответ: $n = (1 + k^2)\omega_0^2 R/8\pi k(k+1)g$.

11. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен k?

Ответ: $t = 3\omega R/4kg$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

2. Сивухин Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1979. – Т. 1. – 551 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. – 416 с.

4. Русаков В. Ф. Механика / В. Ф. Русаков. – Донецк: ДонНУ, 2013. – 141 с.

Оглавление

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович
Русакова Надія Михайлівна

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ

(для студентів денної форми навчання спеціальностей Математика», «Прикладна математика», «Комп'ютерні науки», «Метрологія, інформаційно-вимірювальні технології та вимірювальна техніка»)

Навчальний посібник

(Російською мовою)

Редактор Т. О. Важеніна
Технічний редактор Т. О. Важеніна

Підписано до друку
Формат 60 х 84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 3,08
Тираж прим. Зам. 48

Донецький національний університет (Вінниця)
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 1854 від 24.06.2004