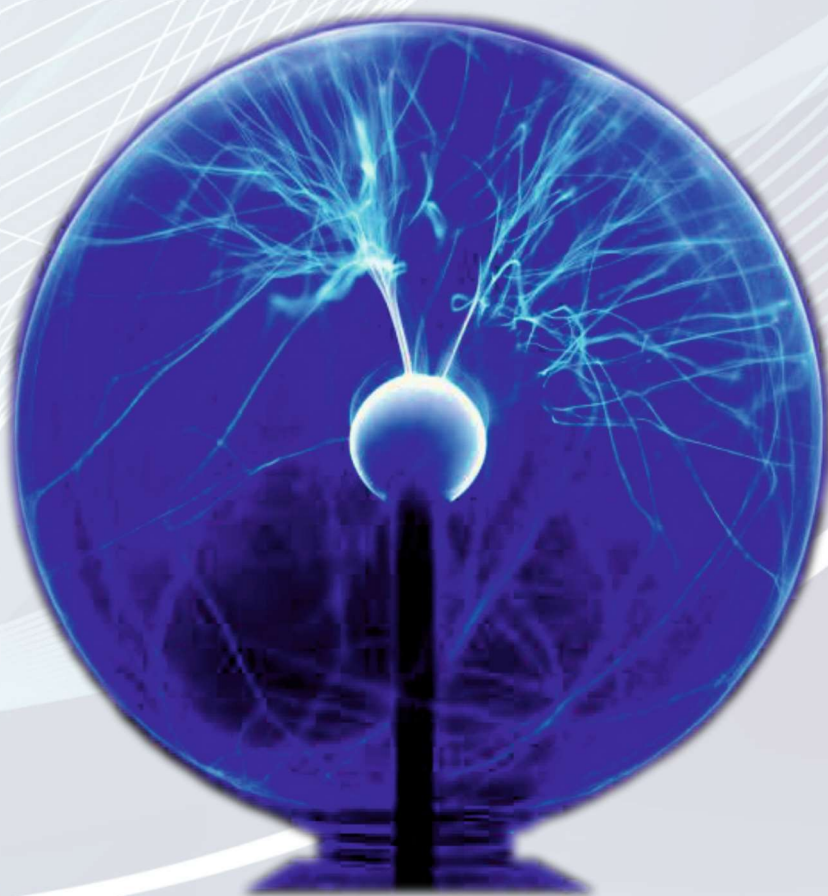


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ І ДИДАКТИКИ ФІЗИКИ**

РУСАКОВ В. Ф.

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ І ДИДАКТИКИ ФІЗИКИ

РУСАКОВ В. Ф.

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

Навчальний посібник
Видання друге, виправлене і доповнене

Вінниця
ДонНУ імені Василя Стуса
2020

УДК 378.147:34
Р 882

*Друкується за рішенням Вченої ради
Донецького національного університету імені Василя Стуса
(протокол № _____ від _____ 2020 р.)*

Автор:

В. Ф. Русаков

д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики і дидактики фізики ДонНУ імені Василя Стуса.

Рецензенти:

Е. Є. Зубов

д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб., головний науковий співробітник Інституту металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України;

В. Г. Крижановський

д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри радіофізики та кібербезпеки ДонНУ імені Василя Стуса.

Русаков В. Ф.

Р 882 Електрика та магнетизм: навчальний посібник / В. Ф. Русаков.
Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2020. 244 с.

ISBN

У посібнику викладено матеріал з електромагнетизму відповідно до програми із загальної фізики.

Для студентів спеціальностей: «Фізика та астрономія», «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», «Кібербезпека», «Метрологія та інформаційно-вимірвальні технології», «Прикладна фізика», «Середня освіта. Фізика». Може використовуватися студентами й інших спеціальностей під час вивчення відповідних розділів курсу загальної фізики.

УДК 378.147:34

© Русаков В. Ф., 2020

ISBN

© ДонНУ імені Василя Стуса, 2020

ВСТУП

У посібнику представлений матеріал з електромагнетизму і електромагнітних хвиль, який протягом декількох років викладався студентам фізико-технічного факультету. Усі явища викладені на основі теорії близькодії, електричні і магнітні поля розглядаються як прояви єдиної матеріальної субстанції – електромагнітного поля. Електропровідність металів розглянута на основі класичної теорії електропровідності Друде–Лоренца. У процесі викладення матеріалу наводиться опис експериментальних результатів з їхнім подальшим теоретичним узагальненням і поданням у вигляді основних законів електромагнетизму – рівнянь Максвелла. Основні закони наведені як в інтегральній, так і в диференціальній формах. Такий підхід дає змогу проводити детальніше вивчення явищ електромагнетизму. Розглянуто електричні та магнітні властивості речовини.

Значна увага приділяється розгляду електричних коливань, електромагнітних хвиль та їхніх властивостей.

Поряд з теоретичним матеріалом посібник містить велику кількість задач як з докладним викладом методики їхнього розв'язання, так і для самостійного розв'язання. Передбачається, що приведення методики розв'язання задач значно спростить засвоєння теоретичного матеріалу.

І. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 1. Елементарний заряд. Два роди електрики

У природі існує чотири типи взаємодій.

1. Гравітаційна – керує взаємодією тіл, які мають маси, істотно проявляється тільки за великих мас тіл, на астрономічних відстанях, має далекодіючий характер, тобто перетворюється на нуль тільки за нескінченної відстані між взаємодіючими тілами, що мають масу.

2. Сильна – керує взаємодією нуклонів у ядрі атома, виявляється на відстанях порядку розмірів ядра – 10^{-15} м. Це так звана короткодіюча взаємодія.

3. Слабка – керує взаємними перетвореннями елементарних частинок і проявляється на відстанях порядку розмірів частинок, тобто теж є короткодіючою.

4. Електромагнітна – керує взаємодією заряджених тіл, як і гравітаційна взаємодія, носить далекодіючий характер.

Із зазначених взаємодій тільки електромагнітна взаємодія істотно проявляється на тих просторових масштабах, які визначають життя людського суспільства. Електромагнітна взаємодія визначає всі сили, з якими ми стикалися в механіці (пружності, тертя, в'язкості та ін.), крім сили тяжіння, яка має гравітаційну природу. Електромагнітну природу має взаємодія між ядрами і електронами в атомах, між атомами в молекулах, між молекулами і т. ін. Електромагнітні явища лежать в основі роботи усіх електрорадіотехнічних і електронних пристроїв та приладів, без яких життя сучасного людського суспільства уявити неможливо. Сила електромагнітної взаємодії між двома електронами у 10^{40} разів перевершує силу їхньої гравітаційної взаємодії.

Прояв електромагнітної взаємодії пов'язаний з поняттям заряду. Поняття заряду є первинним в електродинаміці. Існує найменший заряд, який називається елементарним. Елементарний заряд чисельно дорівнює заряду електрона (протона) $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Заряд квантується, тобто заряд будь-якого

тіла q кратний елементарному заряду e : $q = \pm Ne$, де N – ціле число. У природі існує, як кажуть, два види електрики або два види зарядів, які домовилися називати позитивними і негативними. Заряд є інваріантною величиною, при переході з однієї системи відліку в іншу він не змінюється, тобто величина заряду тіла не залежить від швидкості його руху. Виконується закон збереження заряду: в замкнутій системі зарядів заряд зберігається при будь-яких взаємодіях і рухах заряджених тіл, що складають систему. Розділ фізики, що вивчає взаємодію і рух заряджених тіл і пов'язані з ними процеси, називається **електродинамікою**.

§ 2. Взаємодія зарядів. Закон Кулона

Заряди взаємодіють між собою. Розділ електродинаміки, що вивчає взаємодію нерухомих зарядів, називається **електростатикою**. Однойменні заряди відштовхуються, різнойменні – притягуються. Закон взаємодії зарядів був встановлений експериментально Ш. Кулоном у 1785 р. і носить його ім'я. Для встановлення закону взаємодії використовувалися точкові заряди і крутильні ваги.

Закон Кулона: сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів прямо пропорційна величині кожного із зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Сила спрямована уздовж прямої, яка з'єднує заряди (рис. 1.1).

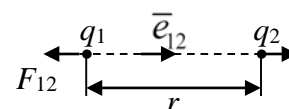


Рис. 1.1.

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{e}_{12},$$

де \vec{e}_{12} – одиничний вектор, який вказує напрямок сили Кулона, k – коефіцієнт пропорційності, модуль сили:

$$F = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}.$$

Напрямок сили вздовж прямої, що з'єднує заряди, впливає з властивостей симетрії (однорідності та ізотропності) простору.

Далі в тексті посібника будемо вважати, що перший індекс у сили вказує, на яке тіло діє сила, другий – з боку якого тіла діє сила. Наприклад, \vec{F}_{ij} – сила, яка діє з боку j -го тіла на i -е тіло.

Дослід показує, що сила взаємодії двох даних зарядів не змінюється, якщо поблизу них помістити ще які-небудь заряди. Нехай є система N зарядів q_1, q_2, \dots, q_N , помістимо в неї (або поблизу неї) заряд q_a . Зі сказаного вище впливає, що результуюча сила \vec{F} , з якою діють на заряд q_a N зарядів q_i , визначається за формулою:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ai},$$

де \vec{F}_{ai} – сила, з якою діє на заряд q_a заряд q_i за відсутності інших $N - 1$ зарядів.

Тобто сила, що діє на виділений заряд з боку системи зарядів, дорівнює рівнодіючій сил попарної взаємодії даного заряду з кожним із зарядів системи.

У міжнародній системі одиниць СІ (Le Systeme International d'Unites) одиниця заряду – кулон, похідна одиниця.

1 кулон дорівнює заряду, який протікає за 1 секунду крізь поперечний переріз провідника при силі струму в ньому 1 ампер. (Визначення ампера буде наведено нижче).

Поряд з системою СІ в електродинаміці використовується абсолютна електростатична система одиниць – СГСЕ-система. 1 кулон = $2,998 \cdot 10^9$ СГСЕ одиниць заряду.

1 СГСЕ абсолютна електростатична одиниця заряду дорівнює заряду, який взаємодіє з рівним йому в вакуумі на відстані 1 см з силою в 1 дину (1 дин = 10^{-5} Н).

Наскільки великий заряд в 1 кулон? Щоб відповісти на це питання знайдемо силу взаємодії між нерухомими зарядами в 1 кулон, розташованими на відстані 1 м у вакуумі:

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{(100)^2} \text{ СГСЕ} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н.}$$

Це дуже велика величина. Вона дорівнює силі, з якою тиснув би на опору вантаж масою в мільйон тон!!! Реальні заряди тіл зазвичай бувають значно менші.

До багатьох формул електродинаміки, якщо їх записувати в СГСЕ-системі, входять множниками 4π та електродинамічна стала c , яка дорівнює швидкості світла у вакуумі. Щоб позбутися від них у найбільш важливих формулах, коефіцієнт пропорційності в законі Кулона в системі СІ вважають рівним $1/4\pi\epsilon_0$. Тоді закон Кулона в системі СІ запишеться у вигляді:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}.$$

Змінений у такий спосіб запис формули закону Кулона називається раціоналізованим. ϵ_0 – електрична стала. Її величину легко визначити. Нехай $q_1 = q_2 = 1 \text{ Кл}$, $r = 1 \text{ м}$, тоді:

$$9 \cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{1^2},$$

звідки

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 0,885 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}.$$

Одиниця вимірювання Ф/м (фарад, поділений на метр) більш детально буде описана нижче.

У простій формі закон Кулона справедливий для точкових зарядів або рівномірно заряджених куль. При визначенні сили взаємодії між тілами довільної форми їх необхідно розбити на елементарні заряди, знайти силу взаємодії між цими елементарними зарядами (вважаючи їх точковими) і потім проінтегрувати за об'ємами тіл, що взаємодіють.

§ 3. Електричне поле. Напруженість поля

Взаємодія між зарядами, які знаходяться у стані спокою, здійснюється через електричне поле, поняття про яке було введено М. Фарадеєм. Відповідно до ідеї Фарадея, будь-який заряд створює в навколишньому просторі електричне поле. Воно проявляє себе в тому, що на будь-який заряд, поміщений в нього, діє сила. За величиною сили, що діє на цей заряд, можна говорити про інтенсивність поля.

Для виявлення і дослідження електричного поля потрібно скористатися якимось пробним зарядом. Для того щоб сила, що діє на пробний заряд, характеризувала поле у даній точці, пробний заряд повинен бути точковим, а величина його – досить малою, щоб не спотворювати досліджуване поле.

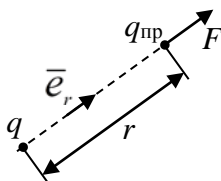


Рис. 1.2.

Дослідимо за допомогою $q_{пр}$ поле точкового заряду q (рис. 1.2). Помістимо $q_{пр}$ в точці поля r , тоді сила, яка на нього діє, дорівнюватиме:

$$\vec{F} = q_{пр} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right),$$

де \vec{e}_r – орт радіус-вектора \vec{r} .

Звідки витікає, що сила, яка діє на пробний заряд, залежить не тільки від величин, які визначають поле, але і від величини пробного заряду. Очевидно, що відношення $F/q_{пр}$ для усіх пробних зарядів буде одне й те ж саме і

залежить тільки від q та \vec{r} , що визначають поле в даній точці. Це відношення приймається як величина, що характеризує електричне поле:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

напруженість електричного поля у даній точці.

Напруженість електричного поля чисельно дорівнює силі, яка діє на одиничний заряд, що знаходиться у даній точці поля. Напрямок вектора \vec{E} збігається з напрямком сили, що діє на позитивний заряд. Формула залишається справедливою і у випадку $q_{пр} < 0$, але тоді вектори \vec{E} та \vec{F} мають протилежний напрямок.

Спрямований вектор напруженості електричного поля \vec{E} вздовж прямої, що проходить через заряд і дану точку поля від заряду, якщо він позитивний, і до заряду, якщо він негативний (рис. 1.3).



Рис. 1.3.

До поняття напруженості ми дійшли, досліджуючи поле нерухомого точкового заряду. Це визначення розповсюджується і на випадок поля, яке створюється будь-якою сукупністю нерухомих зарядів. Однак варто пам'ятати, що під впливом пробного заряду може змінитися розташування зарядів, тому величину пробного заряду потрібно брати досить малою.

Напруженість поля точкового заряду є

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$

За одиницю напруженості приймається напруженість у такій точці поля, де на заряд, що дорівнює одиниці, діє сила, величина якої теж дорівнює одиниці. В системі СІ одиниця напруженості поля 1 В/м (вольт, поділений на метр, див. нижче).

Заряд в 1 Кл на відстані 1 м створює поле:

$$E = \frac{1}{4\pi\left(\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\right)} \cdot \frac{1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ В/м.}$$

На кожний точковий заряд q , поміщений у дану точку електричного поля напруженістю E , буде діяти сила

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Сила, що діє на позитивний заряд, паралельна напруженості електричного поля і спрямована протилежно напруженості електричного поля у випадку негативного заряду.

Із правила додавання сил для системи точкових зарядів випливає, що напруженість поля системи зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожен із зарядів системи окремо:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Це твердження називається принципом суперпозиції (накладання) електричних полів. Він дає змогу обчислити напруженість поля будь-якої системи зарядів. Розглядаючи протяжні заряди як сукупність нескінченно малих зарядів dq , будь-яку систему зарядів можна звести до сукупності точкових зарядів. Внесок кожного з таких зарядів розраховується за формулою для точкового заряду, результуюче поле визначається інтегруванням отриманого співвідношення.

Електричне поле можна описати, вказавши для кожної точки величину і напрямок вектора напруженості \vec{E} . Сукупність цих векторів утворює поле вектора напруженості електричного поля. Як було показано у механіці, при вивченні руху рідин поле вектора швидкості можна уявити наочно за допомогою ліній струму. Аналогічно електричне поле можна описати за допомогою ліній напруженості (E -ліній) – силових ліній. Ці лінії проводяться у такий спосіб, щоб дотична до них в кожній точці збігалася з напрямком вектора напруженості E (рис. 1.4). Щільність ліній обирається так, щоб кількість ліній, які пронизують одиницю поверхні, перпендикулярної до ліній площадки, дорівнювала чисельному значенню вектора E . Напруженість поля точкового заряду

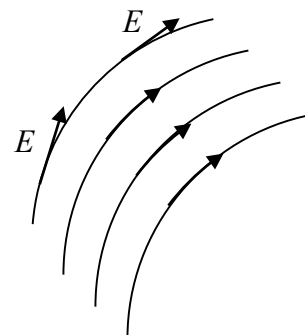


Рис. 1.4.

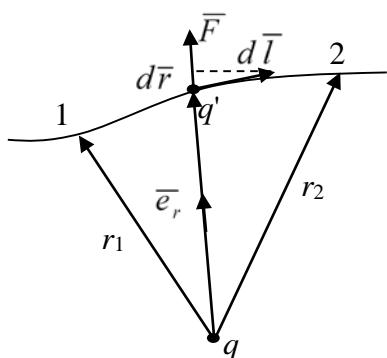


Рис. 1.5.

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, оточимо заряд сферою радіуса r , її площа – $S = 4\pi r^2$. Тоді кількість ліній, які перетинають поверхню сфери, $q/\epsilon_0 = const$, тобто залишається постійною, незалежно від відстані до заряду (джерела поля). Звідси випливає, що лінії напруженості електростатичного поля ніде, крім заряду, не починаються і не закінчуються (рис. 1.3).

Лінії напруженості можуть починатися і закінчуватися тільки на зарядах, або йти на нескінченність.

§ 4. Потенціал і робота сил електростатичного поля

У будь-якій точці поля нерухомого точкового заряду q на інший точковий заряд q' діє сила

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{e}_r = F(r) \vec{e}_r.$$

Сила \vec{F} – центральна, а центральне поле, як було показано у курсі механіки, консервативне, отже, робота сил поля над зарядом q' не залежить від форми траєкторії, але визначається тільки початковим і кінцевим положенням заряду, вона дорівнює:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F(r) \vec{e}_r d\vec{l},$$

де $d\vec{l}$ – елементарне переміщення заряду. Інтегрування ведеться від початкового до кінцевого положення рухомого заряду. З рисунку видно, що $\vec{e}_r d\vec{l} = dr$, тобто

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F(r) dr.$$

Підставляючи вираз для модуля сили $F(r)$, отримаємо:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{(1)}^{(2)} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right).$$

В останньому виразі враховано, що результат інтегрування не залежить від форми траєкторії руху заряду (сила Кулона консервативна).

Робота сил консервативного поля дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Порівнюючи два останні вирази, бачимо, що:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r} + const.$$

Значення константи для зручності вибирається так, щоб при віддаленні заряду на нескінченність ($r \rightarrow \infty$) його потенціальна енергія перетворювалася на нуль. За цієї умови:

$$W(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}.$$

Відповідно до визначення, потенціальна енергія, яку має пробний заряд, залежить не тільки від його величини, а й від величин q та r , що визначають поле. Різні заряди q' , q'' , ... матимуть і різну потенціальну енергію W' , W'' , ..., однак відношення $W/q_{\text{пр}}$ буде для усіх пробних зарядів одним і тим самим. Величина

$$\varphi = \frac{W}{q_{\text{пр}}}$$

називається потенціалом поля в цій точці і використовується поряд з напруженістю \vec{E} для опису електричних полів.

Потенціал чисельно дорівнює потенціальній енергії, яку мав би у даній точці поля одиничний позитивний заряд. Потенціал точкового заряду має вигляд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Знайдемо потенціал системи N точкових зарядів. Врахуємо, що робота – величина адитивна, тоді робота поля системи зарядів з переміщення заряду q' з початкового положення в кінцеве дорівнює:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N A_i,$$

де:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right),$$

тут r_{i1} – відстань від довільного заряду системи q_i до початкового положення заряду q' , аналогічно r_{i2} .

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Потенціальна енергія пробного заряду q' у полі системи зарядів:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{r_i}$$

і потенціал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}.$$

Потенціал поля, що створюється системою зарядів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, які створюються кожним із зарядів окремо (оскільки додавання скалярне, розрахунок потенціалу виявляється зазвичай простішим, ніж розрахунок напруженості електричного поля системи зарядів).

Заряд q , який знаходиться у точці поля з потенціалом φ , має потенціальну енергію:

$$W = q\varphi.$$

Тоді робота електричного поля з переміщення заряду з точки 1 у точку 2 є:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Робота, яка виконується над зарядом силами поля, дорівнює добутку величини заряду на різницю потенціалів в початковій і кінцевій точках поля.

Якщо заряд q із точки з потенціалом φ віддаляється на нескінченність (де, відповідно до вибору початку відліку потенціальної енергії, потенціал дорівнює нулю), робота сил поля дорівнюватиме:

$$A_{\infty} = q\varphi,$$

тобто потенціал чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили поля над одиничним позитивним зарядом при віддаленні його з цієї точки на нескінченність (якщо навпаки, заряд переміщається з нескінченності у дану точку поля, – робота здійснюється проти сил поля).

За одиницю потенціалу приймають потенціал у такій точці поля, для переміщення в яку з нескінченності одиничного позитивного заряду необхідно виконати роботу, яка дорівнює одиниці.

У системі одиниць СІ одиниця потенціалу 1 В (вольт).

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В},$$

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}.$$

1 вольт – це різниця потенціалів, при проходженні якої заряд в 1 кулон набуває енергію у 1 джоуль.

В електродинаміці як одиницю енергії використовують електрон-вольт. Це енергія, яку набуває електрон при проходженні різниці потенціалів в 1 вольт.

$$1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Енергія взаємодії двох зарядів:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}.$$

Щоб знайти енергію взаємодії усіх зарядів системи, необхідно підсумувати енергію їхньої попарної взаємодії, без самодії. Для системи N зарядів, отримаємо:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} W_{ik}(r_{ik}),$$

де:

$$W_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}.$$

Тоді:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^N \frac{q_k}{r_{ik}} -$$

потенціал, який створюється усіма зарядами, крім q_i , у тій точці, де розміщується заряд q_i . Для енергії взаємодії матимемо:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

§ 5. Зв'язок між напруженістю електричного поля і різницею потенціалів

Електричне поле можна описати або за допомогою векторної величини \vec{E} – напруженості поля, або скалярної φ – потенціалу поля. Очевидно, між цими величинами повинен існувати певний зв'язок, оскільки вони характеризують один і той самий фізичний об'єкт. Якщо врахувати, що напруженість поля \vec{E} пропорційна силі, що діє на заряд, а φ – потенціальній енергії, легко зрозуміти, що цей зв'язок має бути аналогічним до зв'язку між потенціальною енергією і силою, яка була отримана в механіці:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W.$$

Тут $\vec{\nabla}W$ – градієнт потенціальної енергії.

Враховуючи, що

$$\vec{F} = q\vec{E}, W = q\varphi,$$

підставляючи в попереднє співвідношення, легко отримати:

$$q\vec{E} = -\vec{\nabla}(q\varphi),$$

звідки:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

або

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \dots$$

Покажемо, як працюють отримані співвідношення при розрахунку напруженості поля точкового заряду, якщо відомий його потенціал.

Потенціал поля точкового заряду, як показано вище, є:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Тоді:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3},$$

аналогічно для похідних по y та z , звідки легко отримати:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r,$$

що збігається з отриманим раніше результатом. Тобто за відомим значенням потенціалу електричного поля φ можна знайти його напруженість \vec{E} .

Можна розв'язати і обернену задачу: за заданим значенням напруженості електричного поля \vec{E} знайти його потенціал φ . Для цього потрібно скористатися виразом для роботи сил поля при переміщенні заряду:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}d\vec{l}.$$

З іншого боку, як показано вище:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Зіставляючи два останні співвідношення, отримаємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}.$$

Для замкненого контура:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Ця умова справедлива тільки для електростатичного поля.

Поверхня, усі точки якої мають однаковий потенціал, називається еквіпотенціальною

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

При переміщенні заряду вздовж еквіпотенціальної поверхні потенціал не змінюється, робота дорівнює нулю, отже, дотична до поверхні, складова вектора \vec{E} дорівнює нулю, тобто в кожній точці вектора \vec{E} напрямлений вздовж нормалі до еквіпотенціальної поверхні.

§ 6. Теорема Гауса

Розглянемо потік вектора напруженості електричного поля (або число силових ліній) через довільну площадку S : $\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}$.

Згідно з теоремою Остроградського-Гауса, потік будь-якого вектора через замкнуту поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього вектора за об'ємом, обмеженим цією поверхнею (операція дивергенція – це дія оператора Гамільтона скалярно на векторну функцію):

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{A} dV.$$

Розглянемо точковий заряд і оточимо його сферою радіуса r_1 , тоді потік вектора напруженості через цю поверхню дорівнюватиме:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Зауважимо, що результат не залежить від r_1 і тому справедливий для усіх значень r . Отже, повне число силових ліній, які виходять з точкового заряду q , дорівнює q/ϵ_0 , і ці лінії неперервні на всьому шляху до нескінченності. Число силових ліній дорівнює $\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}$, навіть якщо замкнута поверхня не є сферою. Потік вектора напруженості через нескінченно малі поверхні dS та dS' однаковий $\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}d\vec{S}'$, якщо dS та dS' перетинає одне і те ж саме число силових ліній. Проінтегрувавши по поверхні сфери S і довільної поверхні S' , отримаємо:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_{S'} \vec{E}d\vec{S}' = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Підкреслимо ще раз, що S' – замкнута поверхня довільної форми, що охоплює заряд q . Така поверхня називається гаусовою поверхнею.

Щоб вивести теорему Гауса, припустимо, що замкнута поверхня охоплює два точкові заряди q_1 і q_2 . Тоді, згідно з принципом суперпозиції, результуюче поле дорівнюватиме сумі полів, що створюються кожним із зарядів:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{повн}} &= \oint \vec{E}d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)d\vec{S} = \oint \vec{E}_1d\vec{S} + \oint \vec{E}_2d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0}, \\ \Phi_{\text{повн}} &= \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 + q_2), \end{aligned}$$

тобто повне число силових ліній (потік вектора \vec{E}), які перетинають замкнуту поверхню, дорівнює добутку $\frac{1}{\epsilon_0}$ та величини повного заряду всередині цієї поверхні.

Або: потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі замкнутих всередині цієї поверхні зарядів, поділений на ϵ_0 . Це твердження називається теоремою Гауса в інтегральній формі:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i.$$

Розглянемо заряд, розподілений за об'ємом V з густиною ρ , причому густина заряду може бути функцією координат. В цьому випадку повний заряд можна представити у вигляді $\sum_i q_i = \int \rho dV$, тоді для потоку вектора напруженості електричного поля, створеного довільним зарядженим тілом, можна написати:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Враховуючи, що $\oint \vec{A} d\vec{S} = \int \text{div} \vec{A} dV$, отримаємо:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Виходячи з того, що обрано довільний об'єм, з отриманого співвідношення будемо мати:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.$$

Це співвідношення називається теоремою Гауса в диференціальній формі: дивергенція вектора напруженості електричного поля дорівнює густині електричного заряду, поділеного на електричну сталу.

§ 7. Рівновага зарядів на провіднику

Носії заряду в провіднику здатні переміщуватися під дією як завгодно малої сили. Для рівноваги зарядів на провіднику необхідне виконання таких умов:

1. Напруженість поля всюди всередині провідника повинна дорівнювати нулю. У цьому випадку сила, яка буде діяти на будь-який заряд, також буде дорівнювати нулю:

$$\vec{E} = 0,$$

тобто потенціал всередині провідника всюди повинен бути постійним $\varphi = const$.

2. Напруженість поля на поверхні всюди повинна бути спрямована вздовж нормалі до поверхні:

$$\vec{E} = \vec{E}_n.$$

Отже, у випадку рівноваги зарядів на провіднику його поверхня буде еквіпотенціальною (рис. 1.6).

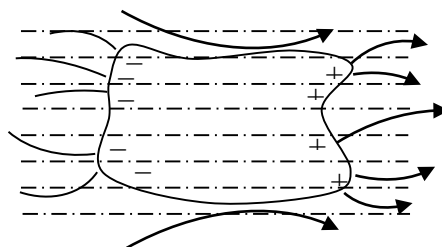


Рис. 1.6.

§ 8. Провідник у зовнішньому електричному полі

При внесенні незарядженого провідника в електричне поле носії заряду починають рухатися: позитивні – в напрямку вектора \vec{E} , негативні – у протилежний бік. В результаті на кінцях провідника виникають заряди протилежного знаку, які називаються індукованими зарядами.

Поле цих зарядів спрямоване протилежно зовнішньому полю. Отже, накопичення зарядів на кінцях провідника призводить до ослаблення в ньому поля. Перерозподіл зарядів відбуватиметься доти, поки не будуть виконані умови рівноваги, тобто поки поле всередині провідника не перетвориться на нуль. Індуковані заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника. Якщо всередині провідника є порожнина, то при рівноважному розподілі індукованих зарядів поле всередині неї дорівнює нулю. На цьому ґрунтується електростатичний захист. Прилад, який необхідно захистити від впливу зовнішнього електричного поля, поміщають у металевий корпус або каркас з металевої сітки.

Зведення основних формул та задачі до розділу I

Згідно із законом Кулона, сила, що діє з боку заряду q_1 на заряд q_2 , дорівнює:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r^3}. \quad (1.1)$$

Тут \vec{r}_{12} – радіус-вектор, проведений від заряду q_1 до заряду q_2 , $r = |\vec{r}_{12}|$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала, заряди – величини алгебраїчні.

Електричне поле характеризується вектором напруженості \vec{E} , який чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний нерухомий пробний електричний заряд $q_{пр}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}. \quad (1.2)$$

Це співвідношення частіше використовується для знаходження сили за відомою напруженістю: $\vec{F} = q_{пр}\vec{E}$.

Напруженість поля точкового заряду q дорівнює:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.3)$$

Вектор \vec{r} проведений від заряду до точки спостереження, $r = |\vec{r}|$.

Для розрахунку поля \vec{E} , створеного системою з n зарядів, використовується принцип суперпозиції:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad (1.4)$$

де \vec{E}_i – напруженість поля, створеного зарядом з номером i .

Для випадку неперервного розподілу заряду по об'єму V з об'ємною густиною ρ принцип суперпозиції передбачає інтегрування:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}}{r^3} \rho dV. \quad (1.5)$$

Тут \vec{r} – вектор, проведений від елементарного об'єму dV до точки спостереження, $r = |\vec{r}|$. Якщо заряд розподілений по поверхні з поверхневою густиною σ або вздовж контура з лінійною густиною λ , тоді розраховуються відповідно поверхневий або криволінійний інтеграли:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r}}{r^3} \sigma dS, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\vec{r}}{r^3} \lambda dl. \quad (1.5a)$$

Теорема Остроградського–Гауса: потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, охоплених цією поверхнею, поділений на електричну сталу:

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

Для заряду, неперервно розподіленого в об'ємі V , охопленого поверхнею S , $q = \int_V \rho dV$. Теорема Остроградського–Гауса зручна при розрахунку полів, створених зарядами, розподіленими з деякою симетрією. У диференціальній формі теорема має вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.6 a)$$

Поле нерухомих зарядів потенціальне, і циркуляція вектора напруженості вздовж будь-якого замкнутого контуру L дорівнює нулю:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = 0. \quad (1.7)$$

У потенціальному полі потенціал φ пов'язаний із напруженістю:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (1.8)$$

або в декартових координатах:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.8 \text{ a})$$

Проекція E_l на будь-який напрямок у просторі, що задається вектором \vec{l} , дорівнює:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (1.9)$$

В осесиметричних і сферично симетричних задачах, де поле залежить тільки від однієї просторової координати r :

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (1.10)$$

Потенціал поля точкового заряду:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.11)$$

Для потенціалу поля системи зарядів також справедливий принцип суперпозиції:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.12)$$

За неперервного розподілу зарядів у просторі потенціал визначається інтегруванням за об'ємом, де міститься заряд:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (1.13)$$

У разі розподілу заряду по поверхні з поверхневою густиною σ або вздовж контура з лінійною густиною λ замість об'ємного розраховуються поверхневий або криволінійний інтеграли, відповідно:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (1.13 \text{ а})$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r}. \quad (1.13 \text{ б})$$

На відміну від напруженості \vec{E} , потенціал є скалярною величиною, розрахунок якої простіший. Тому на практиці часто спочатку знаходять потенціал φ , а потім диференціюванням – вектор напруженості \vec{E} .

З (1.8) та (1.6 а) отримуємо основне рівняння електростатики:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.14)$$

де Δ – оператор Лапласа, він дорівнює скалярному квадрату оператора Гамільтона.

Робота сил електричного поля з переміщення заряду q з точки з потенціалом φ_1 у точку з потенціалом φ_2 дорівнює:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.15)$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Тонке півкільце радіуса $R = 20$ см заряджене рівномірно зарядом $q = 0,7$ нКл. Знайти модуль напруженості електричного поля у центрі кривини цього півкільця.

Розв'язання

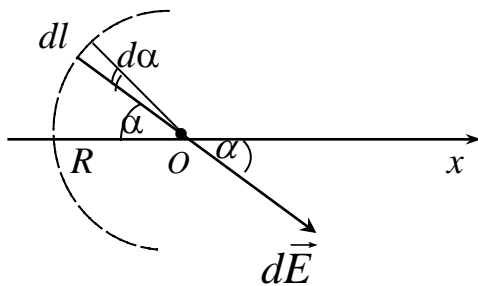
Виділимо на півкільці (рис. 1.7) нескінченно малу дугу, розташовану під кутом α , довжиною:

$R = 0,2$ м
$q = 0,7 \cdot 10^{-9}$ Кл
$E = ?$

$$dl = R d\alpha, \quad (1)$$

де $d\alpha$ – малий приріст кута. Тоді, позначаючи λ лінійну густину заряду на півкільці:

$$\lambda = \frac{q}{\pi R}, \quad (2)$$



виразимо заряд дуги:

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\alpha. \quad (3)$$

Рис. 1.7.

Його можна вважати точковим через малість дуги. Створена ним напруженість поля в центрі півкільця за величиною дорівнює (1.3):

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\alpha. \quad (4)$$

Цей вектор утворює з віссю x кут α . Застосуємо принцип суперпозиції (1.5), складаючи усі вектори $d\vec{E}$, які відповідають будь-яким значенням α , від $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Внаслідок симетрії і однорідності розподілу заряду ($\lambda = \text{const}$) напрям результуючого вектора \vec{E} збігається з віссю x ,

оскільки перпендикулярні до неї складові компенсуються. Завдання зводиться до підсумовування проєкцій \vec{E} на вісь x :

$$dE_x = dE \cdot \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha. \quad (5)$$

Таке підсумовування відповідає інтегруванню по α , яке можна провести по чверті кільця, подвоївши результат:

$$E = E_x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}. \quad (6)$$

Підставляючи λ із (2), отримуємо:

$$E = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

Підставляючи числові значення, знайдемо:

$$E = \frac{0,7 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,2^2} \approx 0,1 \text{ (кВ/м)}.$$

Задача 2. Тонке дротяне кільце радіуса $R = 100$ мм має електричний заряд $q = 50$ мкКл. Яким буде приріст сили, яка розтягує дріт, якщо у центр кільця помістити точковий заряд $q_0 = 7$ мкКл?

Розв'язання

$R = 100 \text{ мм}$ $q = 50 \text{ мкКл}$ $q_0 = 7 \text{ мкКл}$ $\Delta T - ?$	Заряд розподілений вздовж металевого кільця рівномірно з лінійною густиною:	$\lambda = \frac{q}{2\pi R}. \quad (1)$
---	---	---

Кожен елемент кільця відштовхується всіма іншими однойменно з ним зарядженими елементами, тому кільце загалом розтягується. Його утримують від розриву сили пружності, що виникають у матеріалі при деформації розтягування. Так, електричні сили, сили відштовхування, прагнуть відірвати одну половинку кільця від іншої, а сили пружності, що виникають в точках контакту півкільця, перешкоджають відриву.

Наприклад, на ліве півкільце (рис. 1.8) з боку правого діють електрична сила відштовхування F , спрямована перпендикулярно діаметру MN , і сили пружності T , прикладені в діаметрально протилежних точках M та N контакту півкільця. Умова рівноваги:

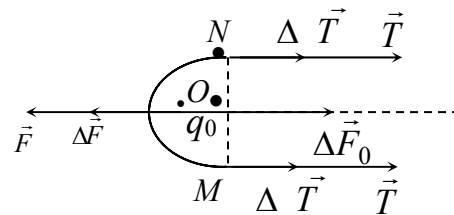


Рис. 1.8.

$$2T - F = 0. \quad (2)$$

Заряд q_0 того ж знаку, що і заряд півкільця, діє на півкільце з силою ΔF , яка обумовлює появу додаткових сил пружності ΔT . Тепер умова рівноваги набуде вигляду:

$$2(T + \Delta T) - (F + \Delta F) = 0. \quad (3)$$

Віднявши з виразу (3) вираз (2), отримаємо для приросту сили розтягування ΔT :

$$\Delta T = \frac{\Delta F}{2}. \quad (4)$$

За третім законом Ньютона сила ΔF чисельно дорівнює силі ΔF_0 , прикладеної з боку півкільця до заряду q_0 . Її можна виразити через напруженість електричного поля E , яке створюється півкільцем у його центрі O , і заряд q_0 :

$$\Delta F = \Delta F_0 = E q_0. \quad (5)$$

Величина E знайдена у задачі 1 (формула (6)). Підставляючи у неї значення λ , яке визначається виразом (1) цієї задачі, отримаємо:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi^2\epsilon_0 R^2}. \quad (6)$$

Нарешті, за формулою (4), з урахуванням формул (5) і (6), запишемо:

$$\Delta T = \frac{q q_0}{8\pi^2\epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

Підставляючи числові значення, знайдемо:

$$\Delta T = \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,1)^2} \approx 50 \text{ (Н)}.$$

Задача 3. Система складається з тонкого зарядженого дрютяного кільця радіуса R і дуже довгої рівномірно зарядженої нитки, розташованої вздовж осі кільця так, що один з її кінців збігається з центром кільця. Останнє має заряд q . На одиницю довжини нитки припадає заряд λ . Знайти силу взаємодії кільця і нитки.

Розв'язання

$\frac{q}{R}$ $\frac{\lambda}{F}$?	<p>На рис. 1.9 зображені кільце і нитка, що розташована на його осі, яка збігається з віссю x. Нехай обидва вони заряджені позитивно. У точці A на відстані x від центру кільця заряд dq на нескінченно малій дузі dl кільця створює поле з напруженістю $d\vec{E}$:</p>
---	--

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2}, \quad (1)$$

де α – кут між $d\vec{E}$ та віссю x .

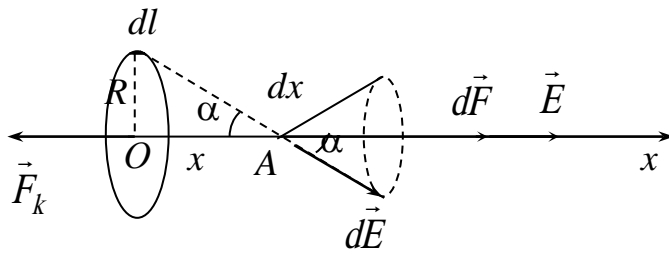


Рис. 1.9.

Оскільки кільце заряджене рівномірно, то кожному елементу dl відповідає такий самий, діаметрально протилежний. Множина елементів кільця породжує множину векторів $d\vec{E}$, які утворюють конічну поверхню. Складаючись за принципом суперпозиції (1.5), вони дають результуючий вектор \vec{E} , спрямований вздовж осі. Отже, додавати необхідно їхні проєкції dE_x :

$$dE_x = dE \cdot \cos \alpha = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos^3 \alpha. \quad (2)$$

Оскільки α та x однакові для усіх елементів кільця, інтегрування дає:

$$E = E_x = \frac{\cos^3 \alpha}{2\pi\epsilon_0 x^2} \int_0^q dq = \frac{q \cos^3 \alpha}{4\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (3)$$

На елемент нитки довжиною dx , яка несе заряд $dq = \lambda dx$, діє сила dF , яка визначається співвідношенням (1.2):

$$dF = E \cdot dq = E \lambda dx = \frac{q \lambda \cos^3 \alpha}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx. \quad (4)$$

Для знаходження результуючої сили F , яка діє на усю напівнескінченну нитку, необхідно проінтегрувати по x в границях від 0 до ∞ . У виразі (4) дві змінні величини, виразимо x через α та проінтегруємо по α в границях від $\pi/2$ до 0. Насправді,

$$x = R \cdot ctg\alpha, \quad (5)$$

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

З урахуванням цього, з формули (4) випливає:

$$dF = \frac{q\lambda \cos^3 \alpha}{4\pi\epsilon_0(R \cdot ctg\alpha)^2} \left(-\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha \right) = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha. \quad (6)$$

Тоді сила, з якою кільце діє на усю напівнескінченну нитку, дорівнює:

$$F = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \alpha d\alpha = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (7)$$

Цікаво, що точку прикладання цієї результуючої сили вказати неможливо – вона йде на нескінченність. Можна зобразити силу F_k , що збігається з нею і протилежно спрямована. Згідно з третім законом Ньютона, вона прикладена до кільця в його центрі.

Інтегрування по x виразу (4) з урахуванням того, що $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$, дає той самий результат:

$$F = \int_0^\infty \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (8)$$

Задача 4. Знайти напруженість електричного поля, створеного поверхнею обертання в центрі одного з обмежуючих її кіл. Задано рівняння твірної поверхні $y = y(x)$, причому $y(0) \neq 0$, $y(a) \neq 0$, $a < 0$, і поверхнева густина заряду σ . Отриману формулу застосувати до випадку зарядженої півсфери радіуса R .

Розв'язання

$y = y(x)$ σ R $E(x) - ?$	На рис. 1.10а зображена поверхня обертання S , обмежена колами в площинах $x = 0$ та $x = a < 0$. Поверхню можна представити у вигляді сукупності кільцевих нескінченно вузьких смужок, вирізаних площинами, перпендикулярними до осі x з координатами x та $x + dx$.
---	---

Площа поверхні такої смужки дорівнює:

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (1)$$

її заряд:

$$dq = \sigma \cdot dS = 2\pi\sigma y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (2)$$

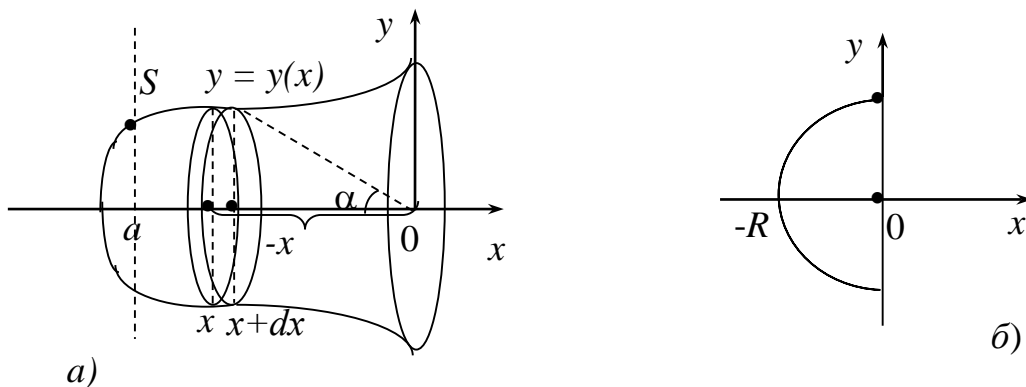


Рис. 1.10.

Тут y' позначає похідну функції $y(x)$ по x .

У точці O , тобто на відстані $(-x)$ від центру виділеного кільця, напруженість поля, згідно з формулою (3) попередньої задачі, дорівнює:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(-x)^2} \cos \alpha, \quad (3)$$

де $\cos \alpha = \frac{(-x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Підставляючи вираз для dq за формулою (2), отримуємо:

$$dE = \frac{2\pi\sigma y \sqrt{1+(y')^2} dx}{4\pi\epsilon_0(-x)^2} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}} x dx. \quad (4)$$

Результуючу напруженість знайдемо інтегруванням отриманого виразу по x у границях від a до 0.

Як приклад розглянемо півсферу радіуса R , схематично представлену на рис. 1.10б. Для неї:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad a = -R.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (4), отримаємо:

$$dE = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x^2} \cdot R}{R^3 \sqrt{R^2 - x^2}} x dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} x dx. \quad (5)$$

Інтегрування дає:

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^2} \int_{-R}^0 x dx = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}. \quad (6)$$

Отриманий результат (6) є достатньо цікавим. Він показує, що напруженість електричного поля, створеного рівномірно зарядженою півкулею у її центрі, не залежить від радіуса півкулі, а визначається тільки поверхневою густиною її заряду σ .

Задача 5. Тонкий прямий стрижень довжиною l , який знаходиться у вакуумі, заряджений рівномірно з лінійною густиною λ . Знайти модуль і напрямок напруженості електричного поля у точці, яка розташована від стрижня на відстані a і знаходиться на перпендикулярі до стрижня, що проходить через один з його кінців. Дослідити випадок напівнескінченного стрижня.

l
 λ
 a
 $E - ?$
 $tg\beta - ?$

Розв'язання

Сумістимо початок координат з кінцем стрижня, вісь y спрямуємо уздовж стрижня, а вісь x – перпендикулярно до нього.

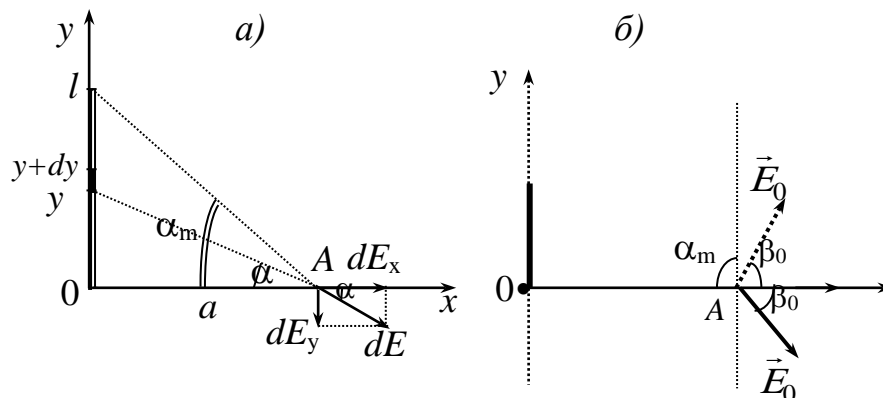


Рис. 1.11.

Напрямки векторів напруженості на рис. 1.11 а відповідають позитивно зарядженому стрижню. Його нескінченно малий елемент з координатою y довжини dy несе заряд λdy , який створює у точці A напруженість електричного поля, що визначається формулою (1.3):

$$dE = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0(a/\cos\alpha)^2}. \quad (1)$$

Координаті y відповідає кут α .

Оскільки $y = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$, то $dy = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$, і для dE отримуємо:

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} d\alpha, \quad (2)$$

де $d\alpha$ – нескінченно малий кут, під яким з точки A видно елемент стрижня dy . Використовуючи принцип суперпозиції (1.5), складемо усі вектори $d\vec{E}$. Для цього треба додати їхні компоненти:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \alpha d\alpha, \quad dE_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha d\alpha. \quad (3)$$

У результаті отримаємо:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_m} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha_m,$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\alpha_m} \sin \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \alpha_m - 1). \quad (4)$$

Тут α_m – кут, під яким видно другий кінець стрижня з точки A і який можна визначити одним із співвідношень:

$$\cos \alpha_m = \frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}}; \quad \sin \alpha_m = \frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}}. \quad (5)$$

Модуль результуючого вектора напруженості знайдемо з урахуванням співвідношень (4) і (5):

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 \cdot (1 - \cos \alpha_m)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+l^2}}\right)}. \quad (6)$$

Вектор \vec{E} утворює з віссю x кут β , який визначається з урахуванням (4) зі співвідношення:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|E_y|}{E_x} = \frac{1 - \cos \alpha_m}{\sin \alpha_m} = \sqrt{\left(\frac{a}{l}\right)^2 + 1} - \frac{a}{l}. \quad (7)$$

Для відповіді на друге питання задачі перепишемо формули (6) і (7) у більш компактному вигляді, скориставшись тригонометричними співвідношеннями:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cos \frac{\alpha_m}{2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_m}{2}. \quad (8)$$

Результат для напівнескінченного стрижня отримаємо, спрямувавши α_m до $\pi/2$ (тепер у стрижня тільки один кінець, і точка A лежить на перпендикулярі, що проходить через нього, як показано на рисунку 1.11 б):

$$E_0 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \beta_0 = \frac{\pi}{4}. \quad (9)$$

Вектор напруженості поля нескінченного стрижня можна знайти як суму векторів напруженостей двох симетрично розташованих напівнескінчених стрижнів. Він спрямований вздовж осі x і за модулем дорівнює:

$$E_\infty = 2E_0 \cos \beta_0 = 2 \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}. \quad (10)$$

Задача 6. Рівномірно заряджена нитка, на одиницю довжини якої припадає заряд λ , вигнута, як показано на рис. 1.12. Радіус закруглення R значно менший за довжину нитки. Знайти модуль напруженості у центрі кривини O закругленої ділянки.

Розв'язання

Заряджена нитка складається з трьох ділянок: 1, 2, 3, вказаних на рис. 1.12. AB та CD – напівнескінченні нитки, BC – дуга кола. Ділянка 2 – це чверть кола радіуса R , яка створює поле з вектором напруженості \vec{E}_2 , спрямованим уздовж бісектриси прямого кута, утвореного прямолінійними ділянками (на рисунку – вісь x). Розрахуємо величину E_2 , скориставшись формулою (6) задачі 1, в якій верхню границю інтегрування $\frac{\pi}{2}$, яка відповідає півколу, замінимо на $\frac{\pi}{4}$ для чверті кола. Отримаємо:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \\ R \\ E - ? \end{array} \right|$$

$$E_2 = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1)$$

Для розрахунку напруженостей, що створюються напівнескінченними ділянками 1 і 3, можна скористатися результатом задачі 5. Вектор \vec{E}_1 складає кут $\frac{\pi}{4}$ зі своєю ділянкою 1, \vec{E}_3 – кут $\frac{\pi}{4}$ зі своєю ділянкою 3, отже, ці вектори напрямлені вздовж однієї прямої в протилежні боки. Їхні модулі однакові внаслідок рівновіддаленості точки O від кінців кожної з напівнескінченних ділянок. Отже, при додаванні векторів \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 за принципом суперпозиції (1.4) вектори \vec{E}_1 та \vec{E}_3 взаємно знищуються, і в результаті залишається:

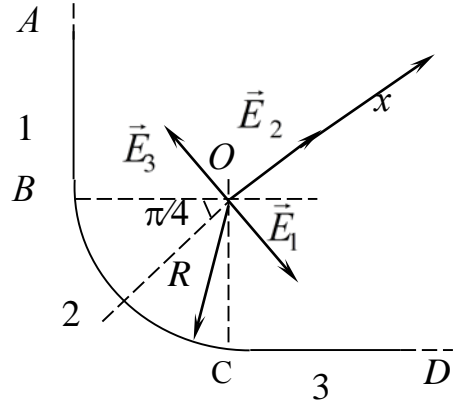


Рис. 1.12.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_2. \quad (2)$$

Модуль цього вектора, згідно з (1), дорівнює:

$$E = E_2 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3)$$

Задача 7. Кругла тонка платівка з внутрішнім радіусом a і зовнішнім b , яка знаходиться у вакуумі, заряджена з поверхневою густиною σ . Знайти потенціал і модуль напруженості електричного поля на осі платівки як функцію відстані x від її центру. Дослідити отриманий вираз за $x \rightarrow 0$ та $x \gg b$.

Розв'язання

a	
b	
σ	
$\varphi - ?$	
$V - ?$	

Електричне поле однорідно зарядженої пластини має осьову симетрію, вектор напруженості на її осі x спрямований вздовж осі (рис. 1.13). Його величину можна отримати диференціюванням потенціалу, розподіл якого знаходиться за принципом суперпозиції (1.13а).

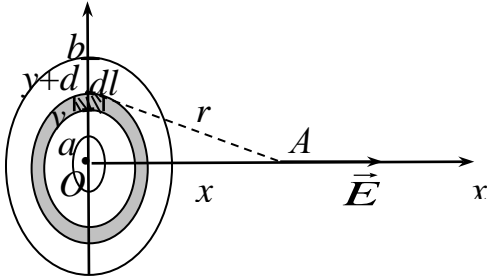


Рис. 1.13.

(Нагадаємо, що розрахунок потенціалу простіший, оскільки це скалярна величина).

Виділимо на пластівці вузьку кільцеву смужку з внутрішнім радіусом y і шириною dy , а на смужці – малу ділянку довжиною dl . Її площа дорівнює $dl \cdot dy$, а заряд $dq = \sigma dl \cdot dy$. Виділений елемент

можна розглядати як точковий заряд. У точці A з координатою x на відстані $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ він створює потенціал (1.11):

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma dl dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

Підсумовування потенціалів від усіх ділянок (за принципом суперпозиції) зводиться до подвійного інтеграла по площі кільця:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_a^b \left(\int_0^{2\pi y} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} dl \right) dy = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_b^a \frac{2y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{x^2 + a^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Вектор напруженості дорівнює градієнту потенціалу з протилежним знаком. Внаслідок симетрії задачі він спрямований вздовж осі x , скориставшись співвідношенням (1.10), знайдемо:

$$E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \right]. \quad (3)$$

Дослідимо граничні випадки.

Якщо $x \rightarrow 0$ отримаємо:

$$\varphi(0) = \frac{\sigma(b-a)}{2\varepsilon_0}; \quad E(0) = 0. \quad (4)$$

Для аналізу отриманих функцій за $x \gg b$ перетворимо формули (2) та (3):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \right], \\ E(x) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{x}\right)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Хоча $\frac{b}{x} \ll 1$, $\frac{a}{x} \ll 1$, просто знехтувати цими доданками у формулах (5)

не можна: це б дало $\varphi = 0$, $E = 0$, що відповідає нескінченно віддаленим точкам, але не відбиває характеру спадання цих величин при віддаленні від центру платівки.

Для отримання шуканої залежності скористаємося розкладанням у ряд функції виду $f(z) = (1+z)^p$ за $z \ll 1$ і обмежимося доданками першого порядку малості:

$$(1+z)^p \approx 1 + pz. \quad (6)$$

Застосовуючи це розкладання до виразів для потенціалу $\varphi(x)$ ($p = 1/2$) і напруженості $E(x)$ ($p = -1/2$), отримуємо:

$$\varphi(x) \approx \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 \right] = \frac{\sigma(b^2 - a^2)}{4\varepsilon_0 x} = \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}. \quad (7)$$

$$E(x) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x}\right)^2 \right] = \frac{\sigma(b^2 - a^2)}{4\varepsilon_0 x^2} = \frac{\sigma\pi(b^2 - a^2)}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}. \quad (8)$$

Тут через q позначений повний заряд платівки, який дорівнює $\sigma\pi(b^2 - a^2)$.

Отримані формули (7) та (8) збігаються з формулами для потенціалу і напруженості поля точкового заряду. Це означає, що на великій (порівняно з її розміром) відстані платівка створює таке поле, як якщо б увесь її заряд був зосереджений в одній точці – в її центрі.

Задача 8. Заряд Q розподілений рівномірно по об'єму кулі радіуса R . Вважаючи діелектричну проникність усюди рівною одиниці, знайти потенціал:

- а) у центрі кулі;
- б) всередині кулі як функцію відстані r від її центру.

Розв'язання

Q	Фізичний сенс має тільки різниця потенціалів, і якщо в задачі потрібно знайти значення потенціалу в деякій точці, то передбачається, що його значення в іншій точці відоме. Прийнято вважати, що такою точкою є точка, нескінченно віддалена від зарядженого об'єкта ($r \rightarrow \infty$), де потенціал вважається рівним нулю. Значення ж його у центрі кулі залежить від розподілу заряду. Оскільки цей розподіл різний всередині і зовні кулі, необхідно розв'язувати послідовно зовнішню задачу (щоб знайти потенціал на поверхні кулі), а потім – внутрішню. Поле однорідно зарядженої кулі центрально
R	
$\varepsilon = 1$	
$\varphi(0) - ?$	
$\varphi(r) - ?$	

симетричне, тобто вектор напруженості виражається через радіус-вектор \vec{r} , як $\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$ (рис. 1.14). В такому полі потенціал зв'язаний з напруженістю співвідношенням (1.10). Знайдемо вираз для напруженості електричного поля кулі.

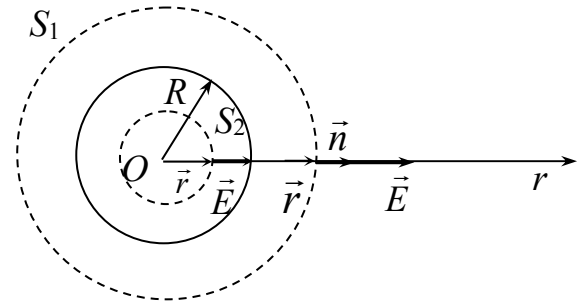


Рис. 1.14.

Для цього скористаємося теоремою Остроградського–Гауса (1.6) і запишемо вираз для потоку вектора \vec{E} через концентричну з кулею сферичну поверхню S_1 деякого радіуса $r > R$:

$$\Phi = \oint_{S_1} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{S_1} (E(r) \frac{\vec{r}}{r} \vec{n} dS) = \oint_{S_1} E(r) dS = E(r) \cdot 4\pi r^2. \quad (1)$$

Тут враховано, що скалярний добуток вектора $\frac{\vec{r}}{r}$ на одиничний вектор нормалі \vec{n} до сферичної поверхні $(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}) = 1$. Поверхня S_1 охоплює усю заряджену кулю, тоді згідно з (1.6):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

(Оскільки за умовою діелектрична проникність дорівнює всюди одиниці, можна використовувати теорему, сформульовану для вакууму).

Отже, для $r > R$ отримуємо:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3)$$

а далі, згідно з (1.10):

$$d\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr. \quad (4)$$

У результаті інтегрування у межах від точки з довільним радіусом r до точки $r \rightarrow \infty$, де $\varphi = 0$, отримуємо:

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = - \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr, \quad (5)$$

або:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

Зокрема, за $r \rightarrow R$ отримаємо:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (7)$$

Тепер при визначенні потенціалу всередині кулі точка на поверхні кулі ($r = R$) виступатиме як точка з відомим значенням потенціалу, який визначається за формулою (7).

Розглянемо сферичну поверхню S_2 , побудовану всередині кулі, радіус цієї поверхні менший за радіус кулі $r < R$. Потік вектора напруженості через неї, як і раніше, виражається за формулою (1). Але заряд q всередині сфери S_2 менший за заряд кулі Q . За постійної об'ємної густини заряду ρ :

$$\begin{aligned} q &= \rho \cdot (4/3)\pi r^3, \\ Q &= \rho \cdot (4/3)\pi R^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Виключаючи ρ , отримаємо:

$$q = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (9)$$

Тоді згідно з теоремою Остроградського–Гауса (1.6):

$$4\pi r^2 E = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}. \quad (10)$$

Отже, для $r < R$ отримуємо:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \quad (11)$$

Зауважимо, що за $r = R$ формули (3) та (11), як і має бути, дають однаковий результат:

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (12)$$

Згідно з (1.10):

$$d\varphi = -E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r dr. \quad (13)$$

Інтегруючи в межах від довільного r до радіуса кулі R , отримуємо:

$$\varphi(R) - \varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r^2 - R^2). \quad (14)$$

Підставляючи $\varphi(R)$ із (7), після перетворень отримаємо залежність потенціалу від координати всередині кулі:

$$\varphi(r) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right). \quad (15)$$

Зокрема, за $r = 0$, тобто у центрі кулі:

$$\varphi(0) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}. \quad (16)$$

Як бачимо, напруженість поля всередині кулі за $r < R$ пропорційна відстані r (11), а зовні, за $r > R$ – обернено пропорційна квадрату відстані (3) від її центру. На рис. 1.15 вгорі наведено графік цієї залежності. Нижче наведено графік для потенціалу. Він складається з гілки параболи (квадратична залежність (15) за $r < R$) і гілки гіперболи (обернено пропорційна

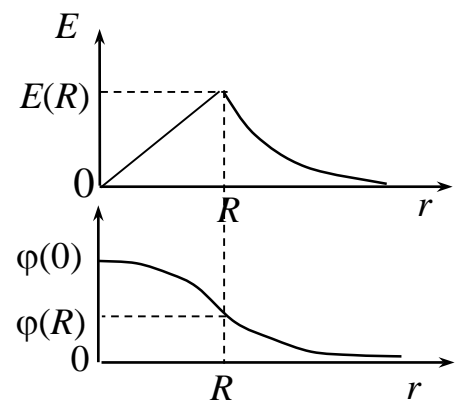


Рис. 1.15.

залежність (6)), які сполучаються без зламу (похідна $\frac{d\varphi}{dr} = -E$ за $r = R$ неперервна).

Задача 9. Тонке кільце радіуса $R = 25$ см має заряд $Q = 5$ мкКл, нерівномірно розподілений по кільцю. Знайти роботу електричних сил при переміщенні точкового заряду $q = 10$ мкКл з центру кільця за довільним шляхом у точку, що знаходиться на осі кільця на відстані $l = 50$ см від його центру.

Розв'язання

$R = 25$ см
$Q = 5$ мкКл
$l = 50$ см
$q = 10$ мкКл
$A = ?$

Для знаходження роботи, яку здійснює електричне поле, переміщаючи заряд з точки 1 у точку 2, необхідно знати потенціали цих точок (1.15). Якби точки були розташовані довільно, задача не мала б розв'язку, оскільки заряд на кільці розподілений нерівномірно, а закон розподілу не заданий.

Однак для рівновіддалених від кільця точок – точок його осі – розв'язок існує.

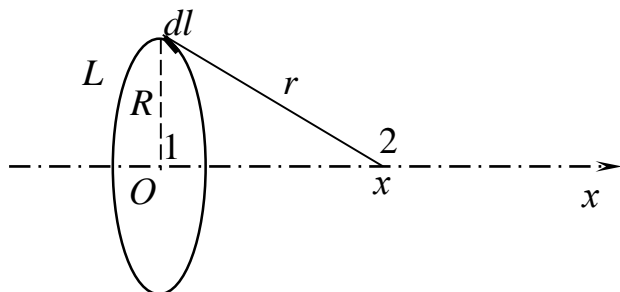


Рис. 1.16.

Розглянемо малий елемент дуги dl на кільці, який несе заряд dQ (рис. 1.16) У точці осі з координатою x (початок координат – в центрі кільця) цей заряд створює потенціал (1.11):

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (1)$$

Вираз у знаменнику не залежить від положення заряду dQ на кільці. Тому при інтегруванні (для знаходження потенціалу, створеного усім кільцем, за принципом суперпозиції) його можна винести за знак інтеграла:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \oint_L dQ. \quad (2)$$

Інтегрування по усій довжині кільця за будь-якого розподілу заряду на кільці дає повний заряд кільця:

$$\oint_L dQ = Q. \quad (3)$$

Підставляючи вираз (3) в формулу (2), отримаємо:

$$\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}. \quad (4)$$

У полі з таким розподілом потенціалу переміщується пробний заряд q з точки 1, де $x = 0$, у точку 2, де $x = l$. При цьому поле кільця виконує роботу, яка визначається за формулою (1.15):

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q[\varphi(0) - \varphi(l)] = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right] =$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2 + 1}} \right]. \quad (5)$$

Підставляючи числові значення, знайдемо:

$$A = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,25} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{50}{25}\right)^2 + 1}} \right] \approx 1 \text{ Дж.}$$

Задача 10. Система складається з кулі радіуса R , зарядженої сферично симетрично, і навколишнього середовища, заповненого зарядом з об'ємною густиною $\rho = \frac{\alpha}{r}$, де α – стала, r – відстань від центра кулі ($r > R$). Знайти заряд кулі, за якого модуль напруженості електричного поля поза кулею не залежить від r . Чому дорівнює ця напруженість? Діелектрична проникність усюди $\epsilon = 1$.

Розв'язання

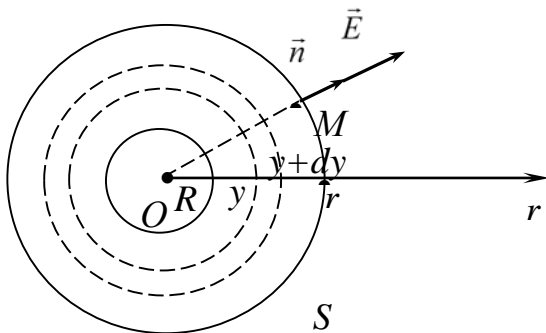
R
 $\rho = \alpha/r$
 $\alpha = \text{const}$
 $r > R: E = \text{const}$

 $Q - ?$
 $E - ?$

За умовою задачі $\epsilon = 1$, що дає змогу використовувати співвідношення для електричного поля у вакуумі.

Напруженість поля сферично симетрично зарядженої системи (вона схематично зображена на рис. 1.17) найпростіше знаходити за теоремою Остроградського–Гауса (1.6). Через точку M на відстані r від центру проведемо

сферичну поверхню S , потік вектора напруженості через яку дорівнює:



$$4\pi r^2 \cdot E. \quad (1)$$

Рис. 1.17.

Тут враховано, що вектори нормалі \vec{n} та напруженості \vec{E} паралельні.

Заряд, замкнений всередині поверхні S , складається із зарядів Q кулі та $q(r)$ сферичного шару, в якому координата y змінюється в межах $R < y < r$. Згідно з теоремою Остроградського–Гауса (1.6):

$$4\pi r^2 E = \frac{Q+q(r)}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

Звідси:

$$E = \frac{Q+q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3)$$

Незалежність цього виразу від r можлива тільки за певної залежності $q(r)$ і відповідному їй заряді Q .

Щоб знайти $q(r)$, представимо сферичний шар між кулею і сферою S у вигляді сукупності тонких сферичних шарів радіуса y ($R < y < r$) і товщиною dy . Об'єм нескінченно малого шару $dV = 4\pi y^2 dy$, його заряд: $dq = \rho \cdot$

$4\pi y^2 dy = \frac{\alpha}{y} \cdot 4\pi y^2 dy = 4\pi\alpha y dy$. Тоді весь заряд між кулею і сферою S дорівнює:

$$q(r) = \int dq = \int_R^r 4\pi\alpha y dy = 2\pi\alpha(r^2 - R^2). \quad (4)$$

Підставляючи отримане значення $q(r)$ у вираз (3), отримаємо:

$$E = \frac{Q + 2\pi\alpha(r^2 - R^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q - 2\pi\alpha R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\alpha}{2\epsilon_0}. \quad (5)$$

Звідси видно, що якщо

$$Q = 2\pi\alpha R^2, \quad (6)$$

напруженість не залежить від r і дорівнює:

$$E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}.$$

Задачі для контролю

1. У вершинах квадрата з діагоналлю $2l$ знаходяться точкові заряди q та $-q$, як показано на рис. 1.18. Знайти модуль напруженості електричного поля у точці, віддаленій на відстань x від центру квадрата і розташованій симетрично відносно вершин квадрата.

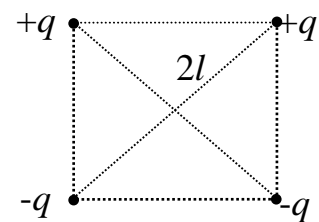


Рис. 1.18.

2. Дві довгі паралельні нитки рівномірно заряджені, кожна з лінійною густиною $\lambda = 0,5$ мкКл/м. Відстань між нитками $l = 45$ см. Знайти максимальне значення модуля напруженості електричного поля у площині симетрії цієї системи, розташованої між нитками.

3. Простір заповнений зарядом з об'ємною густиною $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha r^3)$, де ρ_0 та α – позитивні сталі, r – відстань від центру системи. Знайти модуль

напруженості електричного поля як функцію r . Дослідити отриманий вираз за малих і великих r , тобто за $ar^3 \ll 1$ та $ar^3 \gg 1$.

4. Є два тонкі дротяні кільця радіуса R кожне, осі яких збігаються. Заряди кілець дорівнюють q та $-q$. Знайти різницю потенціалів між центрами кілець, віддаленими один від одного на відстань l , якщо $R = 30$ см, $l = 52$ см, $q = 0,4$ мкКл.

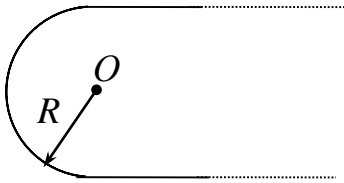


Рис. 1.19.

5. Рівномірно заряджена нитка, на одиницю довжини якої припадає заряд λ , має конфігурацію, показану на рис. 1.19. Радіус заокруглення R значно менший за довжину нитки. Знайти модуль напруженості електричного поля в точці O .

6. Потенціал поля у деякій області простору залежить тільки від координати y як $\varphi = -ay^3 + b$, де a та b – деякі сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду $\rho(y)$. (Вказівка: застосувати співвідношення 1.14).

Задачі для самостійного розв'язання

1. З якою силою взаємодіяли б дві мідні кульки, кожна масою 1 г, перебуваючи на відстані 1 м одна від одної, якби сумарний заряд усіх електронів в них відрізнявся на 1 % від сумарного заряду усіх ядер?

Відповідь: близько $2 \cdot 10^{15}$ Н.

2. Кільце радіуса r з тонкого дроту має заряд q . Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця як функцію відстані l до його центру. Дослідити отриману залежність за $l \gg r$. Визначити максимальне значення напруженості і відповідну відстань l . Зобразити приблизний графік функції $E(l)$.

Відповідь: 1) $E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0(r^2+l^2)^{3/2}}$; за $l \gg r$, $E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$;

$$E \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 r^2} \text{ max за } l = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

3. Точковий заряд q знаходиться у центрі тонкого кільця радіуса R , по якому рівномірно розподілений заряд $-q$. Знайти модуль напруженості

електричного поля на осі кільця в точці, яка віддалена від осі кільця на відстань x , якщо $x \gg R$.

$$\text{Відповідь: } E = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

4. Куля радіуса R має позитивний заряд, об'ємна густина якого залежить від відстані r до центра як $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, де ρ_0 – стала. Вважаючи, що діелектрична проникність $\epsilon = 1$ всюди, знайти:

а) модуль напруженості електричного поля всередині і зовні кулі як функцію r ;

б) максимальне значення модуля напруженості E_{\max} і відповідне йому значення r_m .

$$\text{Відповідь: а) } E = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right), \text{ якщо } r \leq R; \quad E = \frac{\rho R^3}{12\epsilon_0 r^2}, \text{ якщо } r \geq R;$$

$$\text{б) } E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0}, \text{ якщо } r_m = \frac{2}{3}R.$$

5. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною $\lambda = 0,4$ мкКл/м. Обчислити різницю потенціалів точок 1 та 2, якщо точка 2 знаходиться далі від нитки, ніж точка 1, в $\eta = 2$ рази.

$$\text{Відповідь: } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \eta = 5 \text{ кВ}.$$

6. Визначити напруженість електричного поля, потенціал якого залежить від координат x, y за законом:

$$1) \varphi = a(x^2 - y^2); \quad 2) \varphi = axy,$$

де a – стала. Зобразити приблизний вигляд цих полів за допомогою ліній вектора \vec{E} (в площині xy).

$$\text{Відповідь: } 1) \vec{E} = -2a(x\vec{i} - y\vec{j}); \quad 2) \vec{E} = -a(y\vec{i} + x\vec{j}), \quad \vec{i}, \vec{j} - \text{орти осей } x, y.$$

II. ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ

§ 9. Поляризація діелектриків

Діелектриками (ізоляторами) називаються речовини, здатність яких проводити електричний струм в 10^{15} – 10^{20} разів менша, ніж у речовин, які називаються провідниками.

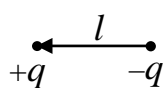


Рис. 2.1.

Діелектрики складаються з атомів і молекул. Діелектрик загалом нейтральний, оскільки позитивний заряд ядер компенсується негативним зарядом електронів. Діелектрик може складатися з полярних або неполярних молекул. За відсутності зовнішнього електричного поля дипольні моменти

неполярних молекул дорівнюють нулю, або, у випадку полярних молекул, розподілені за напрямками хаотично, отже, сумарний дипольний момент діелектрика дорівнює нулю.

Якщо діелектрик внести в електричне поле, то і діелектрик, і поле зазнають суттєвих змін. Дія зовнішнього поля на полярні молекули зводиться до того, щоб повернути молекулу у напрямку поля. Під дією зовнішнього електричного поля заряди нейтральних молекул, які утворюють діелектрик, зміщуються: позитивні – за полем, негативні – проти, в результаті молекула набуває так званого дипольного моменту $\vec{p} = q\vec{l}$ (рис. 2.1), величина якого пропорційна напруженості електричного поля:

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

де β – величина, яка називається поляризованістю молекули, вона має розмірність об'єму – L^3 .

Під дією зовнішнього поля діелектрик поляризується, тобто набуває дипольного моменту. Як міру цієї поляризації беруть дипольний момент

одиниці об'єму. Розбивши об'єм на фізично нескінченно малі об'єми і підсумувавши дипольні моменти, отримаємо:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}}{\Delta V},$$

де \vec{P} – поляризованість діелектрика.

За розмірністю $[P] = [q \cdot L^{-2}]$ збігається із розмірністю $\epsilon_0 E$.

Для ізотропних діелектриків

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E},$$

де κ – діелектрична сприйнятливість діелектрика, це безрозмірна величина.

§ 10. Поле всередині діелектрика

Заряди, що входять до складу молекул діелектрика, називаються зв'язаними, під дією зовнішнього поля ці заряди трохи зміщуються з положення рівноваги, але не залишають своїх молекул.

Заряди, які знаходяться в межах діелектрика, але не входять до складу його молекул, а також заряди, що знаходяться за межами діелектрика, називаються сторонніми.

Результуюче мікроскопічне поле в діелектрику – це суперпозиція поля сторонніх і поля зв'язаних зарядів:

$$\vec{E}_{\text{мікро}} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{зв'яз}}.$$

Спостережуване або діюче, або макроскопічне поле визначається середнім значенням мікроскопічного поля:

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{\text{мікро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{зв'яз}} \rangle,$$

тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}',$$

тут \vec{E}_0 та \vec{E}' – середні поля сторонніх і зв'язаних зарядів відповідно.

Тоді для поляризованості \vec{P} , підставивши макроскопічне поле, отримаємо:

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 (\vec{E}_0 + \vec{E}').$$

§ 11. Об'ємні та поверхневі зв'язані заряди

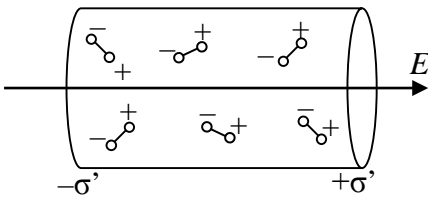


Рис. 2.2.

Очевидно, що поляризованість P і поверхнева σ' або об'ємна ρ' густина зв'язаних зарядів повинні бути зв'язані між собою. Для знаходження цього зв'язку розглянемо нескінченну

плоскопаралельну пластину з однорідного діелектрика, поміщену в однорідне

електричне поле. Виділимо дуже тонкий циліндр з твірними, паралельними полю (рис. 2.3), тоді його об'єм:

$$\Delta V = \Delta S \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

При внесенні діелектрика в зовнішнє електричне поле внаслідок поляризації виникає поверхнева або об'ємна густина зарядів (рис. 2.2).

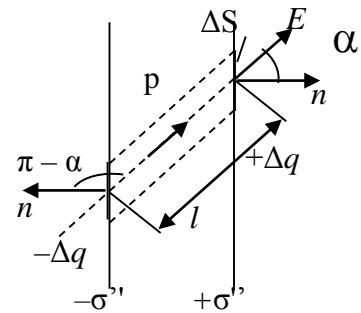


Рис. 2.3.

Цей об'єм має дипольний електричний момент, який можна виразити через поляризованість

$$p = P\Delta V = Pl\Delta S \cos \alpha,$$

але з іншого боку цей циліндр еквівалентний диполю із зарядами $+\sigma' \Delta S$ та $-\sigma' \Delta S$ і відстанню між ними l . Тому дипольний момент p можна записати у вигляді:

$$p = \sigma' \Delta S l,$$

прирівнюючи два останні вирази, отримаємо:

$$\sigma' \Delta S l = Pl\Delta S \cos \alpha.$$

Звідки знаходимо шуканий зв'язок:

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

де P_n – нормальна до поверхні пластини складова поляризованості, знак поверхневої густини зв'язаних зарядів σ' визначається знаком $\cos \alpha$, тобто кутом між зовнішньою нормаллю і полем.

Врахувавши зв'язок між P та E можемо написати:

$$\sigma' = \varepsilon_0 \kappa E_n.$$

Для об'ємної густини зв'язаних зарядів ρ' легко отримати вираз:

$$\rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\text{div} \vec{P}.$$

§ 12. Вектор електричного зміщення

Отже, джерелом поля є сторонні і зв'язані заряди. Напишемо теорему Гауса у диференціальній формі:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho').$$

Тоді, використовуючи приведені вище зв'язки між об'ємною густиною зв'язаних зарядів і поляризованістю, знайдемо:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \text{div} \vec{P}),$$

або

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho,$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

Величина $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ називається електричним зміщенням або електричною індукцією, визначається тільки сторонніми зарядами.

Підставивши у вираз для електричної індукції \vec{D} поляризованість $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$, отримаємо:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E},$$

$\varepsilon = 1 + \kappa$ – називається відносною діелектричною проникністю або просто діелектричною проникністю середовища, тоді:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}.$$

Підставивши вираз для \vec{E} , знайдемо залежність D від q та r .

Проведений розгляд справедливий для ізотропного діелектрика.

§ 13. Поле всередині плоскої пластини

Розглянемо поле, створене двома нескінченними паралельними площинами у вакуумі (його напруженість легко розрахувати, скориставшись теоремою Остроградського–Гауса):

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Внесемо у це поле однорідну пластину з ізотропного діелектрика і розташуємо її так, щоб поле було перпендикулярне до бічних поверхонь (рис. 2.4). Під дією поля пластин діелектрик буде поляризуватися, на його поверхнях утворяться заряди $\pm\sigma'$, які створять всередині діелектрика поле $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$, тоді результуюче поле всередині діелектрика

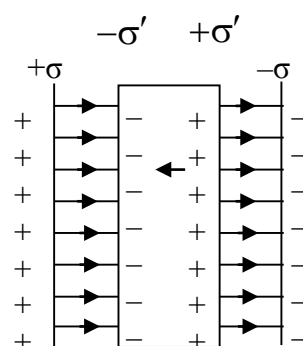


Рис. 2.4.

$$E = E_0 - E' = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma - \sigma'),$$

поза діелектриком – як і раніше $E = E_0$.

Поляризація діелектрика обумовлена ефективним полем E .

Поляризованість $\vec{P} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}$, тоді її нормальна складова дорівнює:

$$P_n = \kappa\varepsilon_0 E_n = \sigma'.$$

Поле \vec{E} перпендикулярне до поверхні пластини, тобто $E = E_n$, тоді

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_0 E.$$

Підставляючи у попередню формулу, отримаємо:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma - \sigma') = E_0 - \kappa E,$$

або

$$E = \frac{E_0}{1+\kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

тобто поле в діелектрику послаблюється у ε разів у порівнянні з зовнішнім полем.

Легко отримати вираз для D :

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \varepsilon_0 E_0 = D_0, \quad \varepsilon = 1 + \kappa.$$

Отже, електричне зміщення D всередині і поза пластиною однакове. Знайдемо поверхневу густину зв'язаних зарядів.

Підставляючи знайдені вище співвідношення для E та E_0 в формулу

$E = E_0/\varepsilon$, отримаємо:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma - \sigma') = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

звідки

$$\sigma' = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

або

$$\sigma' = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \sigma,$$

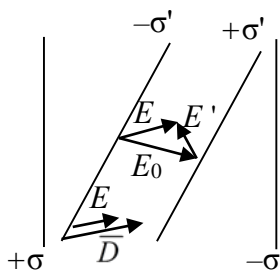


Рис. 2.5.

тобто поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' визначається величиною діелектричної проникності. σ' завжди менше, ніж σ . Напрямки \vec{D} та \vec{E}_0 у загальному випадку не збігаються (рис. 2.5).

Якщо однорідний та ізотропний діелектрик повністю заповнює об'єм, обмежений екіпотенціальними поверхнями поля сторонніх зарядів, то \vec{D} збігається за напрямком із \vec{E}_0 , а напруженість поля всередині діелектрика у ϵ разів менша за \vec{E}_0 .

Розглянемо дві діелектричні пластини з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 , поміщені в зовнішнє електричне поле, так що вони стикаються одна з одною. Внаслідок поляризації на поверхні пластин виникнуть зв'язані заряди, густини яких, через відмінність діелектричних проникностей, будуть різні. Це приведе до того, що площа межі поділу діелектриків буде заряджена з поверхневою густиною зарядів, яка визначається різницею густини зв'язаних зарядів, які виникли в кожному діелектрику. Тоді при переході із одного діелектрика в інший повинні змінюватися напруженість та індукція електричного поля. Можна показати, що на межі поділу двох діелектриків за відсутності вільних електричних зарядів повинні виконуватися граничні умови:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \quad \frac{D_{1\tau}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\epsilon_2},$$

де \vec{n} і $\vec{\tau}$ – одиничні вектори нормалі і дотичної до межі поділу. З приведених виразів видно, що тангенціальна складова вектора напруженості і нормальна складова вектора індукції електричного поля змінюються неперервно, а нормальна складова вектора напруженості і тангенціальна складова вектора індукції зазнають розриву при переході з одного середовища в інше.

§ 14. Електроємність і енергія електричного поля

Як було зазначено вище, переданий провіднику заряд розподіляється так, щоб поле всередині дорівнювало нулю. Заряджений провідник створює в навколишньому просторі електричне поле, напруженість якого залежить від

величини заряду. Зі зв'язку між напруженістю і потенціалом електричного поля випливає, що потенціал відокремленого провідника пропорційний до його заряду:

$$q = C\varphi.$$

Коефіцієнт пропорційності C називається ємністю провідника

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Ємністю відокремленого провідника називається відношення заряду цього провідника до його потенціалу.

Як приклад знайдемо ємність відокремленої кулі. Для цього обчислимо потенціал зарядженої кулі радіуса R . Поле кулі, що знаходиться в середовищі з діелектричною проникністю ε , як показано вище, є:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2},$$

враховуючи, що

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

знайдемо ($\varphi_\infty = 0$)

$$\varphi = \int_R^\infty E_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_R^\infty \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{R}.$$

Звідки

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

За одиницю ємності приймають ємність провідника, потенціал якого змінюється на 1 В за надання йому заряду в 1 Кл. Ця одиниця називається фарад. В СГСЕ-системі за одиницю ємності приймається ємність відокремленої кулі радіусом 1 см, яка знаходиться у вакуумі. Ця одиниця

називається сантиметр. Знайдемо радіус кулі, ємність якої дорівнюватиме 1 фарад:

$$1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ СГСЕ од. ємності} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Тобто куля ємністю в 1 фарад повинна мати радіус приблизно в 1 500 разів більший за радіус Землі!!!

Відокремлені провідники мали б невелику ємність. Щоб її збільшити, використовують системи провідників, які називаються конденсаторами.

Конденсатори виробляють у вигляді двох провідників, розташованих близько один до одного. Ці провідники називаються обкладинками конденсатора. Щоб позбутися впливу зовнішніх тіл, провідники розташовують так, щоб поле, яке вони створюють, було зосереджене всередині конденсатора. При цьому заряди на обкладинках однакові за величиною і протилежні за знаком. Основна характеристика конденсатора – це його ємність:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ називається напругою між обкладинками конденсатора U . Тоді

$$C = \frac{q}{U}.$$

Для збільшення ємності конденсатора простір між його обкладинками заповнюють діелектриком.

Знайдемо формулу для ємності плоского конденсатора, який складається з двох паралельних пластин площею S , розташованих на відстані d одна від одної. Для плоского конденсатора відстань між пластинами багато

менша за їхні лінійні розміри. В цьому випадку можна вважати, що електричне поле зосереджене у зазорі між пластинами і дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

де $\sigma = q/S$ – поверхнева густина заряду на обкладинках конденсатора.

Оскільки поле однорідне, різниця потенціалів між обкладинками плоского конденсатора дорівнює:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

звідки

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

З останньої формули видно, що ємність плоского конденсатора прямо пропорційна площі його пластин і обернено пропорційна відстані між ними.

Для довідок. Ємності циліндричного і сферичного конденсаторів відповідно дорівнюють:

$$C_{\text{ц}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \quad C_{\text{с}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Конденсатори характеризуються U_{max} – максимально допустимою напругою між обкладками, тобто напругою, за якої ще не настає пробій діелектрика, що заповнює простір між обкладинками конденсатора.

Для отримання більш широкого спектра характеристик конденсатори з'єднують в батареї.

Заряджений конденсатор має енергію, яку можна виразити через параметри конденсатора і напруженість поля між його обкладинками, використовуючи отриманий раніше вираз для енергії взаємодії системи зарядів:

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

підставляючи сюди вираз для ємності плоского конденсатора і враховуючи, що $E=U/d$, знайдемо:

$$W = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon U^2}{2 d^2} S d = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V.$$

Тоді для густини енергії електричного поля, зосередженого у конденсаторі, отримаємо: $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$. У цій формулі немає характеристик плоского конденсатора, на прикладі якого проводився розгляд, отже, вона справедлива для будь-якого електричного поля.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ ТА ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II

Під дією електричного поля діелектрики поляризуються, в них виникають зв'язані заряди. Поляризація діелектриків характеризується поляризованістю \vec{P} , яка дорівнює сумарному дипольному моменту \vec{p}_i молекул в одиниці об'єму: $\vec{P} = \sum_{\Delta V} \frac{\vec{p}_i}{\Delta V}$. Поверхнева σ' та об'ємна ρ' густини зв'язаних зарядів визначаються поляризованістю речовини:

$$P_n = \sigma', \quad \nabla \vec{P} = -\rho', \quad (2.1)$$

де P_n – проєкція вектора \vec{P} на напрям зовнішньої нормалі до поверхні.

Для ізотропних діелектриків поляризованість пропорційна напруженості електричного поля:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (2.2)$$

де κ – діелектрична сприйнятливість речовини.

Електричне поле в діелектриках характеризують електричним зміщенням \vec{D} , яке визначається співвідношенням:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.3)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.4)$$

де $\varepsilon = 1 + \kappa$ відносна діелектрична проникність.

Теорема Остроградського–Гауса для вектора \vec{D} : потік вектора електричного зміщення через будь-яку замкнену поверхню S дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів в об'ємі, обмеженому цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2.5)$$

Рівняння електростатики в речовині мають вигляд:

інтегральна форма

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV, \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (2.6)$$

диференціальна форма

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \rho, \quad [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}] = 0. \quad (2.7)$$

Перше рівняння (2.6) вказує на існування в природі електричних зарядів, друге виражає потенціальність електростатичного поля, третє враховує електричні властивості речовини.

На межі поділу двох діелектриків за відсутності вільних електричних зарядів виконуються граничні умови:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, E_{1\tau} = E_{2\tau}, \\ \varepsilon_1 E_{1n} &= \varepsilon_2 E_{2n} \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де \vec{n} та $\vec{\tau}$ – одиничні вектори нормалі і дотичної до межі поділу.

Для однорідного та ізотропного діелектрика напруженість і потенціал поля точкового заряду в ε разів менше, ніж в вакуумі:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \quad (2.9)$$

Рівняння Пуассона для однорідного та ізотропного діелектрика має вигляд:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

В електричному полі заряди знаходяться тільки на поверхні провідника. Всередині провідника напруженість дорівнює нулю, потенціал всюди однаковий, об'ємні заряди відсутні:

$$E = 0, \rho = 0, \varphi = \text{const.} \quad (2.11)$$

Поверхня провідника є екіпотенціальною, вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до поверхні і пропорційний до поверхневої густини заряду:

$$E = E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2.12)$$

Всередині замкненої провідної оболонки напруженість електричного поля дорівнює нулю. На цьому заснована дія електростатичного захисту.

Електричне поле в речовині також підпорядковується принципу суперпозиції і складається з електричного поля у вакуумі \vec{E}_0 і поля індукованих зарядів \vec{E}' :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (2.13)$$

Здатність провідників накопичувати електричні заряди називається електроємністю (або просто ємністю).

Ємність C одиничного провідника визначається відношенням його заряду q до потенціалу φ поверхні:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2.14)$$

Ємність кулі пропорційна її радіусу:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \quad (2.15)$$

Конденсатор представляє собою два провідника (обкладинки), розташовані на деякій відстані один від одного. Ємність конденсатора дорівнює відношенню заряду q до напруги U між обкладинками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (2.16)$$

Ємність конденсатора визначається тільки його геометричними розмірами і властивостями діелектрика, який заповнює простір між обкладинками. Дві паралельні пластини площею S , які знаходяться на малій відстані d , утворюють плоский конденсатор ємністю:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.17)$$

Без врахування крайових ефектів поле плоского конденсатора однорідне з напруженістю $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$ і зосереджено тільки між пластинами.

Заряджений конденсатор має енергію:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.18)$$

Конденсатори з'єднують в батареї послідовно і паралельно. При послідовному з'єднанні ємність батареї визначається виразом:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (2.19)$$

Заряди конденсаторів однакові, а напруги додаються:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n, U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

При паралельному з'єднанні ємності батареї і заряди додаються

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2.20)$$

а напруги на всіх конденсаторах однакові:

$$U_1 = U_2 = U_n.$$

Електричне поле має енергію. Густина енергії w електричного поля (енергія одиниці об'єму) визначається виразом:

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (2.21)$$

З урахуванням формули (2.3) густину енергії електричного поля можна представити у вигляді:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}. \quad (2.22)$$

Перший доданок у (2.22) дає енергію поля у вакуумі, а другий – роботу, яку необхідно виконати, щоб поляризувати діелектрик.

Енергія електричного поля в об'ємі V знаходиться інтегруванням по цьому об'єму:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV. \quad (2.23)$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Є дві нескінченні паралельні площини, заряджені з густинами $+\sigma$ та $-\sigma$. Спочатку вони знаходяться у вакуумі. Потім зазор між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з відносною

діелектричною проникністю ϵ . Якими стануть напруженість поля \vec{E} , електричне зміщення \vec{D} і різниця потенціалів U між площинами?

Розв'язання

Внаслідок симетрії електричне поле між площинами однорідне (рис. 2.6). Найпростіше спочатку знайти електричне зміщення \vec{D} , яке визначається тільки вільними зарядами

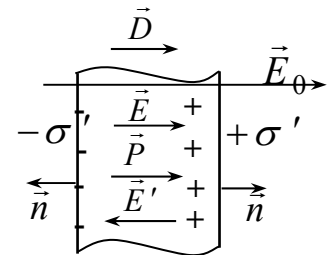


Рис. 2.6.

і між площинами дорівнюватиме:

$$D = \sigma. \quad (1)$$

Напруженість поля визначається за формулою (2.4)

$$E = \frac{D}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2)$$

Різницю потенціалів знайдемо, проінтегрувавши \vec{E} вздовж прямої від позитивно до негативно зарядженої площини:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_{(1)}^{(2)} E dl = \sigma l / \epsilon_0 \epsilon, \quad (3)$$

де l – відстань між площинами.

За відсутності діелектрика характеристики поля дорівнюють:

$$D_0 = \sigma, E_0 = \frac{D_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \varphi_{10} - \varphi_{20} = U_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} l. \quad (4)$$

Порівнюючи (1)–(3) і (4) бачимо, що після внесення діелектрика індукція D не змінилася, а E і U зменшилися у ϵ разів. Ослаблення напруженості поля і потенціалу обумовлене появою на поверхні діелектрика зв'язаних зарядів з густиною $\pm \sigma''$. Причому біля площин з'являються зв'язані

заряди протилежного знака, які створюють електричне поле з напруженістю \vec{E}' , яке послаблює поле вільних зарядів \vec{E}_0 .

Задача 2. В однорідному електричному полі з напруженістю $E_0 = 100 \text{ В/м}$ знаходиться нескінченна плоскопаралельна пластина з однорідного ізотропного діелектрика з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon = 2$, яка розташована перпендикулярно до \vec{E}_0 . Визначити напруженість поля \vec{E} й електричне зміщення \vec{D} всередині пластини, поляризованість P діелектрика і поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' .

Розв'язання

На межі поділу діелектриків виконуються граничні умови (2.8), які для цієї задачі запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = 100 \text{ В/м} \\ \varepsilon = 2 \\ E, D, P, \sigma' - ? \end{array} \right|$$

$$E_0 = \varepsilon E, \quad D_0 = D, \quad (1)$$

де $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ зміщення у вакуумі. Звідси для E та D отримуємо:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = 50 \text{ В/м}, D = \varepsilon_0 E_0 = 0,885 \text{ нКл/м}^2. \quad (2)$$

Поляризованість пов'язана з напруженістю виразом (2.2):

$$P = \kappa \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{E_0}{\varepsilon} = 0,44 \text{ нКл/м}^2. \quad (3)$$

Поверхнева густина зарядів визначається першим зі співвідношень (2.1). Враховуючи, що внаслідок перпендикулярності \vec{E}_0 і пластини $P_n = \pm P$, отримуємо:

$$\sigma' = P_n = \pm \frac{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 = \pm 0,44 \text{ нКл/м}^2. \quad (4)$$

Знак (\pm) в (4) відповідає різнойменним зарядам. Напрямки усіх векторів і полярність зв'язаних зарядів приведені на рис. 2.6.

Задача 3. Нескінченна пластина з діелектрика з проникністю ϵ знаходиться у вакуумі і заряджена однорідно з об'ємною густиною ρ . Товщина пластини $2a$.

а) Знайти потенціал ϕ і напруженість поля E всередині і поза пластиною як функцію відстані x до середини пластини. Потенціал всередині пластини вважати рівним нулю.

б) Визначити поляризованість P діелектрика, об'ємну ρ' і поверхневу σ' густину зв'язаних зарядів.

Розв'язання

$2a, \rho, \epsilon$
 $\phi(0) = 0$
 $E(x), \phi(x),$
 $P, \rho', \sigma' - ?$

Електричне поле пластини, як і поле нескінченної площини, має плоску симетрію. Це означає, що вектор електричного зміщення \vec{D} перпендикулярний до площини пластини і залежить тільки від відстані до середини пластини. Виберемо вісь x , перпендикулярну до пластини, з початком в її середині (рис. 2.7).

Для визначення індукції D скористаємося теоремою Остроградського–Гауса (2.5). Як контрольний об'єм для інтегрування візьмемо прямий паралелепіпед, розташований симетрично до серединної площини пластини (на рис. 2.7 переріз паралелепіпеда зображено прямокутником $ABCD$).

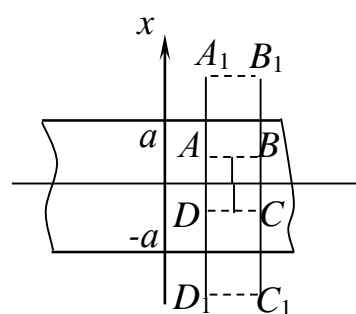


Рис. 2.7.

Розглянемо поле всередині пластини, це означає

$|x| \leq a$. Нехай основи паралелепіпеда AB та CD розташовані на відстані x . При обчисленні потоку врахуємо, що вектор \vec{D} паралельний до бічної поверхні паралелепіпеда і перпендикулярний до основ. Для потоку \vec{D} отримаємо:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 2DS_0, \quad (1)$$

де S_0 – площа основи паралелепіпеда.

Заряд в контрольному об'ємі знайдемо інтегруванням:

$$\int_V \rho dV = \rho \cdot S_0 \cdot 2x. \quad (2)$$

Прирівнюючи (1) та (2) за теоремою Остроградського–Гауса, знаходимо електричне зміщення:

$$D = \rho \cdot x. \quad (3)$$

Напруженість поля E знайдемо зі співвідношення (2.4):

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot x}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Напруженість і потенціал електричного поля (в одновимірному випадку) пов'язані співвідношенням:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad (5)$$

інтегруючи яке, знаходимо потенціал:

$$\varphi = -\int E dx = -\int \frac{\rho \cdot x}{\varepsilon\varepsilon_0} dx = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + C.$$

Стала інтегрування C знаходиться з початкової умови

$$\varphi(0) = 0 = C.$$

Остаточно для потенціалу всередині пластини отримаємо:

$$\varphi = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Потенціал, а потім і інші характеристики поля можна знайти іншим способом, розв'язавши рівняння Пуассона (2.10), яке для цієї задачі має вигляд:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

У рівнянні Пуассона записані повні похідні, тому що φ залежить тільки від однієї координати x .

Після інтегрування рівняння маємо:

$$\varphi = -\frac{\rho \cdot x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} + C_1 \cdot x + C_2. \quad (7)$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 знаходяться з початкових умов

$$\varphi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Перша з умов (8) відповідає вимогам задачі, а друга – відбиває симетрію поля відносно середини пластини (в середині пластини $E=0$), з урахуванням умов (8) знайдемо, що $C_1=0$ та $C_2=0$, і отримаємо розв'язок (6).

Розглянемо електричне поле поза пластиною, тобто за $|x| > a$. Електричне зміщення знайдемо за теоремою Остроградського–Гауса, як було описано вище. Інтегрування проводиться по паралелепіпеду, переріз якого зображено на рис. 2.7 прямокутником $A_1B_1C_1D_1$.

Для потоку і заряду маємо:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 2DS_0, \int_V \rho dV = \rho S_0 \cdot 2a. \quad (9)$$

Тут враховано, що заряд є тільки в тій частині об'єму, яка знаходиться у пластині.

Прирівнюючи праві частини виразів (9), знаходимо спочатку електричне зміщення D , а потім – напруженість поля E :

$$D = \rho \cdot a, \quad E = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}. \quad (10)$$

Потенціал φ визначимо, проінтегрувавши (5):

$$\varphi = - \int E dx = - \int \frac{\rho a}{\varepsilon_0} dx = - \frac{\rho a}{\varepsilon_0} x + C'. \quad (11)$$

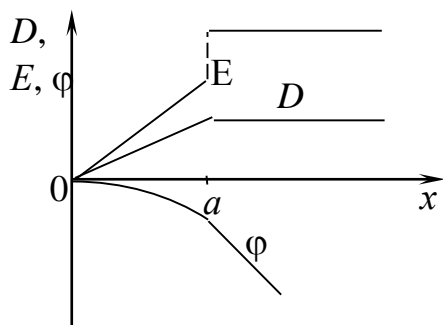


Рис. 2.8.

Стала C' знаходиться з умови неперервності потенціалу на поверхні пластини. Потенціал повинен бути неперервним, оскільки його похідна дає напруженість поля. Якщо φ має розрив, то E в цій точці прямує до нескінченності, що не відповідає фізичному змісту.

Прирівнюючи (6) та (11) за $x = a$, знаходимо:

$$C' = \frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \rho a^2$$

та

$$\varphi = \frac{2\varepsilon - 1}{2\varepsilon\varepsilon_0} \rho a^2 - \frac{\rho a}{\varepsilon_0} x. \quad (12)$$

Отримані залежності графічно зображені на рис. 2.8.

Знайдемо поляризованість і зв'язані заряди в діелектрику. За формулою (2.2) для поляризованості і формулою (4) для напруженості електричного поля всередині діелектрика, маємо:

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon} x. \quad (13)$$

Поверхневу і об'ємну густину зв'язаних зарядів знайдемо, використовуючи співвідношення (2.1):

$$\sigma' = P|_{x=a} = \frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon} a, \quad \rho' = -\frac{dP}{dx} = -\frac{(\varepsilon - 1)\rho}{\varepsilon}. \quad (14)$$

З виразів (14) видно, що на поверхні пластини виникає зв'язаний заряд такого ж знаку, як і вільний. Об'ємний зв'язаний заряд має протилежний знак.

Потенціал φ поза пластиною можна знайти також з рівняння (2.10), яке для цієї області має вигляд:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0.$$

Запишемо розв'язок рівняння

$$\varphi = C_3 x + C_4.$$

Сталі C_3 та C_4 знаходяться із граничних умов на поверхні пластини:

$$\varphi|_{x=a-0} = \varphi|_{x=a+0}, \quad \varepsilon \frac{d\varphi}{dx}|_{x-0} = \frac{d\varphi}{dx}|_{x+0}.$$

Перша з умов виражає неперервність потенціалу, а друга відповідає умові (2.8) для напруженості поля. Після підстановки і диференціювання приходимо до рівнянь

$$-\frac{\rho a^2}{\varepsilon \varepsilon_0} = C_3 a + C_4, \quad -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} = C_3.$$

Звідси знаходимо

$$C_3 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}, \quad C_4 = \frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

і після підстановки сталих приходимо до виразу (12).

Задача 4. Сторонні заряди рівномірно розподілені з об'ємною густиною $\rho > 0$ по кулі радіуса R з однорідного діелектрика з проникністю ε , яка розташована у вакуумі. Знайти залежність напруженості і потенціалу від відстані r до центра кулі. Визначити поляризованість, поверхневу і об'ємну густину зв'язаних зарядів.

Розв'язання

$\rho,$ $R,$ ε <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $E, \varphi - ?$ $P, \sigma', \rho' - ?$	<p>Шукане електричне поле має центральну симетрію, отже, його характеристики залежать тільки від відстані r до центра кулі. Тому для розв'язку задачі зручно скористатися теоремою Остроградського–Гауса для електричного зміщення (2.5). Спочатку розглянемо поле всередині кулі ($r < R$). Для визначення потоку вектора електричного зміщення \vec{D} візьмемо сферичну поверхню радіуса r, центр якої збігається з центром кулі. Внаслідок симетрії на сферичній поверхні електричне зміщення \vec{D} постійне, і для потоку D маємо:</p>
--	--

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi r^2 D. \quad (1)$$

Усередині сферичної поверхні міститься заряд

$$q = \int_V \rho dV = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho, \quad (2)$$

який становить частину заряду кулі, оскільки $r < R$. Прирівнюючи (1) та (2), знаходимо зміщення D і напруженість E

$$D = \frac{1}{3}\rho r, \quad E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Міркуючи аналогічно, для електричного зміщення D зовні кулі ($r > R$) отримаємо

$$4\pi r^2 D = (4/3)\pi R^3 \rho = q_0,$$

де q_0 – заряд кулі. Звідси знайдемо індукцію D , а потім – напруженість поля E :

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (4)$$

Для знаходження потенціалу φ скористаємося зв'язком між E та φ , який для центрально симетричного поля запишеться у вигляді:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Інтегруючи це рівняння всередині і зовні кулі, отримаємо такі вирази для потенціалу:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + C_1, & r \leq R, \\ \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2, & r > R. \end{cases} \quad (5)$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 знаходяться з умов неперервності і нормування потенціалу. На поверхні кулі потенціал неперервний (див. задачу 3), а на нескінченності – прямує до нуля:

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + C_1 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} + C_2,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \right) = 0. \quad (6)$$

З умов (6) знаходимо

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{2\varepsilon+1}{6\varepsilon\varepsilon_0} \rho R^2.$$

Після підстановки сталих для потенціала маємо:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2\varepsilon+1}{6\varepsilon\varepsilon_0} \rho R^2 - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0}, & r \leq R; \\ \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

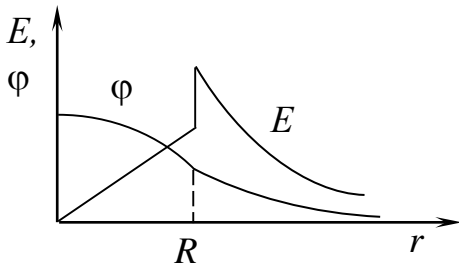


Рис. 2.9.

На рис. 2.9 залежності E та φ від r зображені графічно. За $r = R$ крива для потенціалу має злам, а для напруженості – розрив. Причому напруженість зовні на поверхні кулі в ε разів більше, ніж всередині. Це пов'язано з поверхневими зв'язаними зарядами. Поляризованість діелектрика знайдемо за формулою (2.2):

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon-1)}{3\varepsilon} \rho r. \quad (8)$$

Об'ємну і поверхневу густину зв'язаних зарядів визначимо зі співвідношень (2.1):

$$\rho' = -\nabla \vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \rho, \quad \sigma' = P_n = \frac{\varepsilon-1}{3\varepsilon} \rho R.$$

При обчисленні ρ' враховано, що $\operatorname{div}\vec{r} = 3$. Дійсно, прямим диференціюванням отримуємо:

$$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Задача 5. Однорідний діелектрик з відносною проникністю ϵ має вигляд сферичного шару, внутрішній і зовнішній радіуси якого a та b . Визначити напруженість електричного поля як функцію відстані до центру системи, якщо діелектрик заряджений однорідно позитивним вільним зарядом з об'ємною густиною ρ .

Розв'язання

$a,$ $b,$ $\epsilon,$ ρ	У цій задачі, як і у попередній, електричне поле має радіальну симетрію. Тому для розв'язання скористаємося теоремою Остроградського—Гауса для електричного зміщення (2.5). Розіб'ємо весь простір на три області $r < a$, $a \leq r \leq b$, $r > b$ (рис. 2.10). Для області, в якій немає заряду, отримаємо:
$E(r) - ?$	

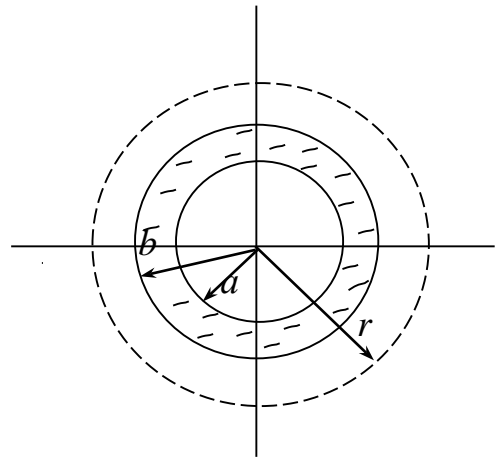


Рис. 2.10.

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi r^2 D = 0.$$

Звідки випливає, що

$$D = 0, \text{ при } r < a. \quad (1)$$

У другій області є вільний заряд, і потік D не дорівнює нулю. Величину заряду $q(r)$ знайдемо, проінтегрувавши по товщині dr тонкого сферичного шару, радіуса r :

$$q(r) = \int_V \rho dV = \int \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi \rho (r^3 - a^3). \quad (2)$$

Прирівнюючи заряд до потоку D

$$q(r) = 4\pi r^2 D, \quad (3)$$

знайдемо електричне зміщення, якщо $a \leq r \leq b$:

$$D = \frac{\rho}{3} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right). \quad (4)$$

Для третьої області заряд визначиться виразом

$$q = \frac{4}{3} \pi \rho (b^3 - a^3). \quad (5)$$

Прирівнюючи (3) та (5), знаходимо D в області $r > b$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (6)$$

Напруженість поля знайдемо по формулі (2.4):

$$E = \begin{cases} 0, & r < a; \\ \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right), & a \leq r \leq b; \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > b. \end{cases}$$

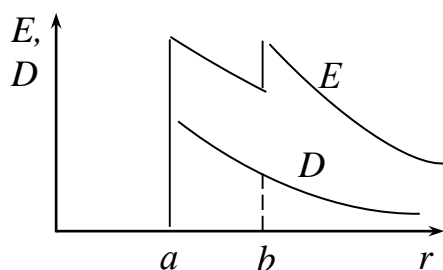


Рис. 2.11.

Графіки залежності $E(r)$ та $D(r)$ приведені на рис. 2.11. Усередині сферичного шару поле відсутнє. Якщо $r \geq a$ зміщення змінюється неперервно, а напруженість поля має розрив за $r = b$, який обумовлений поверхневими зв'язаними зарядами, як зазначалося в задачі 4.

Задача 6. Спочатку напруженість поля між обкладинками плоского конденсатора дорівнює E_0 . Потім половину зазора, як показано на рис. 2.12, заповнили діелектриком з проникністю ε . Знайти напруженість поля і електричне зміщення в обох частинах зазора, якщо при введенні діелектрика напруга на обкладинках конденсатора не змінилася.

Розв'язання

$E_0,$ ε $E, D-?$	Електричне поле між обкладинками конденсатора однорідне, різне в діелектрику і у вакуумі. На поверхні діелектрика виконуються граничні умови (2.8):
-------------------------------------	---

$$E_1 = \varepsilon E_2, \quad (1)$$

де індекси 1 та 2 відповідають вакууму і діелектрику (рис. 2.12).

Напруга між обкладинками конденсатора визначається інтегралом

$$U = \int_0^d E dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}, \quad (2)$$

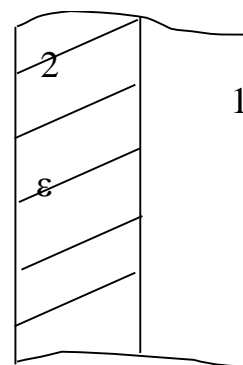


Рис. 2.12.

де d – відстань між обкладинками, а інтегрування ведеться уздовж перпендикуляра до обкладинок. За відсутності діелектрика

$$U = E_0 d. \quad (3)$$

Прирівнюючи (2) та (3) з урахуванням (1), знайдемо напруженість поля:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1} E_0, \quad E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon+1}. \quad (4)$$

Електричне зміщення визначимо за формулою (2.4):

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{1+\varepsilon} E_0, \quad D_2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{1+\varepsilon} E_0.$$

Порівнюючи D_1 та D_2 , бачимо, що вони співпадають. Цей висновок відповідає граничній умові (2.8) для нормальної складової D .

Задача 7. Заряд $q = 10^{-10}$ Кл рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса $R=1$ см, виробленої з однорідного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 2$. Визначити: а) енергію W поля, пов'язаного з кулею; б) енергію W_1 , замкнену всередині кулі; в) енергію W_2 , замкнену в оточуючому кулю просторі.

Розв'язання

$q = 10^{-10}$ Кл, $R = 1$ см, $\varepsilon = 2$	Густина енергії електричного поля визначається виразом (2.21):	$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2},$	(1)
$W, W_1, W_2-?$			

а вся енергія знаходиться інтегруванням по об'єму:

$$W = \int_V w dV. \quad (2)$$

Використовуючи результати розв'язання задачі 4, для E маємо:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}, & r \leq R; \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (3)$$

Для D маємо:

$$D = \begin{cases} \frac{\rho r}{3}, & r \leq R; \\ \frac{q}{4\pi r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (4)$$

Тут ρ – об’ємна густина заряду, яка пов’язана із зарядом кулі виразом

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}. \quad (5)$$

Враховуючи симетрію задачі, інтегрування у (2) найпростіше проводити по товщині кульового шару dr , об’єм якого $dV=4\pi r^2 dr$. Підставляючи (3) та (4) в (1) та (2) і проводячи інтегрування, знаходимо енергію електричного поля всередині

$$W_1 = \int_0^R \frac{\rho^2 r^2}{18\epsilon\epsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\epsilon\epsilon_0} = \frac{q^2}{40\pi\epsilon\epsilon_0 R} = 0,45 \text{ нДж}$$

і зовні кулі

$$W_2 = \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 4,5 \text{ нДж.}$$

Енергія поля, пов’язаного з кулею, дорівнює сумі енергій W_1 та W_2 :

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{5\epsilon} + 1 \right) = 4,95 \text{ нДж.}$$

Задача 8. Простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений послідовно двома діелектричними шарами товщиною d_1 та d_2 з діелектричними проникностями ϵ_1 та ϵ_2 . Площа кожної обкладинки дорівнює S . Знайти ємність конденсатора.

Розв’язання

$d_1, d_2,$ $\epsilon_1, \epsilon_2,$ S $C=?$	Уявімо цей конденсатор як два послідовно з’єднаних конденсатори з ємностями C_1 та C_2 (рис. 2.13). При послідовному з’єднанні додаються величини, зворотні ємностям (2.19):
--	--

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (1)$$

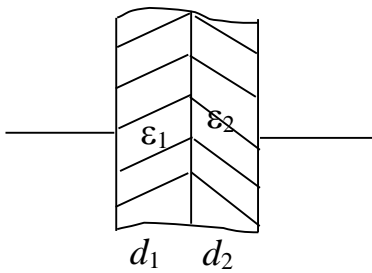


Рис. 2.13.

Кожний з конденсаторів C_1 та C_2 можна вважати плоским і визначати ємність за формулою (2.17)

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 S}{d_2}. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), знаходимо ємність конденсатора:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}.$$

Задача 9. Знайти ємність нескінченного кола, яке утворене повторенням однієї і тієї ж ланки, яка складається з двох однакових конденсаторів, кожен ємності C (рис. 2.14).

Розв'язання

Розглянемо спочатку одну першу ланку кола, що складається з двох послідовно з'єднаних конденсаторів. Ємність цієї ланки знайдемо за формулою (2.19):

$$C_1 = \frac{C}{2}. \quad (1)$$

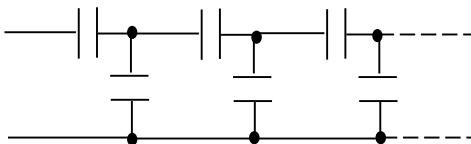


Рис. 2.14.

Додамо ще одну ланку і знайдемо ємність батареї з двох ланок:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_1}. \quad (2)$$

Для батареї з n ланок отримаємо рекурентне співвідношення:

$$\frac{1}{C_n} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C_{n-1}}. \quad (3)$$

Враховуючи, що усі члени в (3) додатні, отримуємо після відкидання другого доданка нерівність $\frac{1}{C_n} > \frac{1}{C}$, яка дає оцінку ємності батареї:

$$\frac{C}{2} \leq C_n \leq C. \quad (4)$$

Позначимо ємність всієї батареї C_δ і врахуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C_\delta$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n-1} = C_\delta$, оскільки ємність нескінченного кола не змінюється при додаванні або видаленні однієї ланки. Тоді, виконавши у співвідношенні (3) граничний перехід, перепишемо його для усього кола у вигляді:

$$\frac{1}{C_\delta} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C_\delta}.$$

Після перетворень отримуємо квадратне рівняння відносно C_δ :

$$C_\delta^2 + C \cdot C_\delta - C^2 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо ємність нескінченної батареї конденсаторів:

$$C_\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} C \approx 0,62 C.$$

Другий корінь рівняння від'ємний і не має фізичного сенсу.

Задача 10. Визначити роботу A , яку потрібно виконати, щоб збільшити на $\Delta x = 0,2$ мм відстань x між пластинами плоского конденсатора,

зарядженими різнойменними зарядами величини $q = 0,2$ мкКл. Площа обкладинок $S = 400$ см², між обкладинками повітря.

Розв'язання

$\Delta x = 0,2$ мм,	
$Q = 0,2$ мкКл,	
$S = 400$ см ² ,	
$\varepsilon_{нов} = 1$	
$A = ?$	

Для розв'язання задачі скористаємося законом зміни енергії системи:

$$\Delta W = A. \quad (1)$$

Енергія конденсатора визначається виразом (2.18):

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (2)$$

Ємність плоского конденсатора розрахуємо за формулою (2.17):

$$C_1 = \frac{\varepsilon_{нов}\varepsilon_0 S}{x}. \quad (3)$$

Після зміщення обкладинок ємність конденсатора буде:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{нов}\varepsilon_0 S}{x + \Delta x}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) та (4) в (2) та (1), отримаємо витрачену роботу:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q^2 \Delta x}{2\varepsilon_0 \varepsilon_0 S} = 11,3 \text{ мкДж.}$$

Задача 11. Два довгі круглі дроти з однаковими радіусами a розташовані у повітрі паралельно один до одного. Відстань між їхніми осями дорівнює b . Знайти взаємну ємність проводів на одиницю їхньої довжини за умови $b \gg a$.

Розв'язання

$\left. \begin{array}{l} a, b, \\ b \gg a \\ C_1 - ? \end{array} \right|$
Виділимо ділянку двопровідної лінії довжиною Δl . За визначенням, ємність цієї ділянки:

$$\Delta C = \frac{\Delta q}{U} = \frac{\lambda \Delta l}{U}, \quad (1)$$

де Δq – заряд, U – різниця потенціалів провідників, λ – лінійна густина зарядів. З (1) для ємності одиниці довжини лінії отримуємо:

$$C_1 = \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{\lambda}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (2)$$

Нехай провідники заряджені так, як зображено на рис. 2.15. Розподіл зарядів по поверхні провідників в загальному випадку нерівномірний тому, що кожен з провідників знаходиться в електричному полі іншого. За умови, що відстані між провідниками великі, порівняно з їхніми розмірами ($b \gg a$), впливом другого провідника на розподіл зарядів по поверхні першого можна знехтувати, що істотно спрощує розв'язок задачі. Згідно з принципом суперпозиції, потенціал φ_1 поверхні першого провідника визначається зарядами як 1, так і 2 провідників:

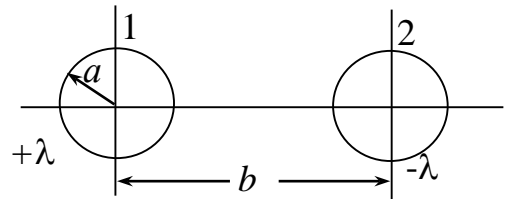


Рис. 2.15.

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_2'. \quad (3)$$

Тут φ_1' – потенціал поверхні провідника 1, що створюється зарядами цього провідника; φ_2' – потенціал поля, що створюється провідником 2 на поверхні провідника 1.

Залежність потенціалу φ для циліндричного провідника найпростіше знайти через напруженість поля E , яку визначимо за теоремою Остроградського–Гауса. Для циліндричної поверхні одиничної довжини за теоремою Гауса маємо:

$$2\pi r E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0},$$

звідки:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}. \quad (4)$$

Потенціал φ знайдемо інтегруванням:

$$\varphi = - \int E dr = - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln r + A, \quad (5)$$

де A – стала інтегрування, яка зникне при обчисленні різниці потенціалів. Підставляючи (5) у (3) і враховуючи, що $r'_1 = a$, $r'_2 = b - a$ | $b \gg a \approx b$, а знаки зарядів протилежні, отримаємо:

$$\varphi_1 = - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln a + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln b = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (6)$$

Аналогічно для потенціалу φ_2 поверхні другого провідника знайдемо:

$$\varphi = - \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Підставляючи φ_1 та φ_2 у вираз (2), визначимо ємність лінії:

$$C_1 = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln b/a}.$$

Задачі для контролю

1. У деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю ϵ електричне зміщення дорівнює \vec{D} . Чому дорівнює поляризованість \vec{P} у цій точці?

2. Визначити густину зв'язаних зарядів на поверхні пластинки зі слюди товщиною $d = 0,2$ мм, яка є ізолятором у плоскому конденсаторі, зарядженому до напруги $U = 400$ В. Відносна діелектрична проникність слюди $\epsilon = 7$.

3. Знайти ємність системи з двох однакових металевих кульок радіуса a , відстань між центрами яких b , причому $b \gg a$.

4. Конденсатор ємністю C_1 , попередньо заряджений до напруги U , підключили паралельно до незарядженого конденсатора ємності C_2 . Знайти приріст електричної енергії цієї системи до моменту встановлення рівноваги. Пояснити отриманий результат.

5. Простір між обкладинками плоского конденсатора ємністю C заповнений однорідним діелектриком з проникністю ϵ . Яку роботу треба виконати, щоб видалити діелектрик? Заряд конденсатора q залишається постійним.

6. Є заряджений плоский конденсатор. Зазор між обкладинками конденсатора заповнюється діелектриком з проникністю ϵ . Що відбувається при цьому з густиною енергії w поля в зазорі, якщо конденсатор:

- а) з'єднаний з джерелом напруги;
- б) відключений від джерела напруги?

7. Простір між пластинами плоского конденсатора ємністю C до половини заповнений однорідним діелектриком з проникністю ϵ , як показано на рис. 2.16. Визначити ємність конденсатора після видалення діелектрика.

8. У схемі, зображеній на рис. 2.17, напруга між точками А та В дорівнює U_0 , відношення ємностей $C_2/C_1 = n$. Знайти напругу між точками С та D.

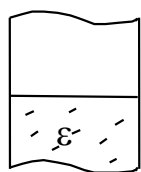


Рис. 2.16.

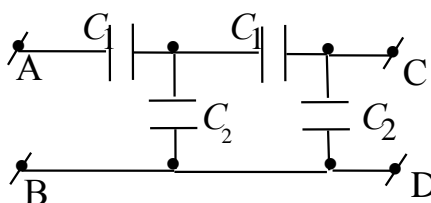


Рис. 2.17.

Задачі для самостійного розв'язання

1. В однорідне електричне поле з напруженістю $E_0 = 100$ В/м поміщена перпендикулярно до поля нескінченна плоскопаралельна пластина з однорідного діелектрика з проникністю $\varepsilon = 2$. Визначити: а) напруженість поля E і електричне зміщення D всередині пластини; б) поляризованість діелектрика P ; в) поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' .

Відповідь: $E = 50$ В/м; $D = 0,885$ нКл/м²; $P = 0,44$ нКл/м; $\sigma' = \pm 0,44$ нКл/м².

2. Нескінченна пластина товщиною a з ізотропного діелектрика поміщена перпендикулярно в однорідне зовнішнє електричне поле з напруженістю \vec{E}_0 . Діелектрична проникність пластини змінюється лінійно вздовж напрямку \vec{E}_0 від значення ε_1 до ε_2 . Поза пластиною $\varepsilon = 1$. Знайти об'ємну густину зв'язаних зарядів ρ' всередині пластини як функцію відстані x від її межі.

$$\text{Відповідь: } \rho' = -\frac{\varepsilon_0 E_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{a \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a} x \right)}$$

3. Зазор між обкладинками плоского конденсатора заповнений ізотропним діелектриком, проникність ε якого змінюється у перпендикулярному до обкладинок напрямку за лінійним законом від ε_1 до ε_2 , причому $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Площа кожної обкладинки S , відстань між ними d . Знайти:

а) ємність конденсатора;

б) об'ємну густину зв'язаних зарядів як функцію ε , якщо заряд конденсатора q і поле \vec{E} в ньому напрямлено у бік зростання ε .

$$\text{Відповідь: а) } C = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{d \cdot \ln \varepsilon_2 / \varepsilon_1}; \text{ б) } \rho' = -\frac{q (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \cdot S \cdot \varepsilon^2}.$$

4. Біля поверхні фарфору напруженість поля у повітрі $E_0 = 200$ В/см. Напрямок поля утворює з нормаллю до поверхні кут $\alpha = 40^\circ$. Визначити: а) кут α_1 між напрямками поля і нормаллю у фарфорі; б) напруженість поля E_1 у фарфорі; в) поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів. Відносна діелектрична проникність фарфору $\varepsilon = 6$.

Відповідь: $\alpha_1 = 79^\circ$; $E_1 = 130$ В/см; $\sigma' = 1,1 \cdot 10^{-11}$ Кл/м².

5. Знайти ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладинок R_1 та $R_2 > R_1$, який заповнений діелектриком з проникністю ϵ . Дослідити випадок, коли зазор між обкладинками d набагато менший за їхній радіус: $(R_1 - R_2) \ll R_1$.

$$\text{Відповідь: } C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \approx \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

6. Нехтуючи розсіюванням поля поблизу країв обкладинок, знайти ємність циліндричного конденсатора. Радіуси обкладинок R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$), їхня довжина l . Зазор між обкладинками заповнений діелектриком з проникністю ϵ .

$$\text{Відповідь: } C_y = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

7. Напруга між обкладинками плоского конденсатора ємністю C дорівнює U . Яку роботу треба виконати, щоб заповнити простір між обкладинками однорідним діелектриком з проникністю ϵ . Напруга на конденсаторі залишається постійною.

$$\text{Відповідь: } A = \frac{CU^2}{2} (\epsilon - 1).$$

8. Знайти ємність нескінченного кола, яке утворене повторенням однієї і тієї ж ланки, що складається з конденсаторів ємністю C_1 та C_2 (рис. 2.18).

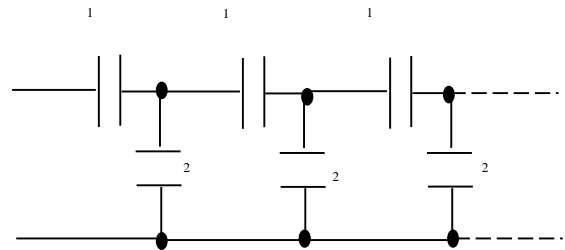


Рис. 2.18.

Відповідь:

$$C_b = \frac{\sqrt{C_2^2 + 4C_1 C_2} - C_2}{2}.$$

9. Напруженість поля між обкладинками плоского конденсатора E_0 . Половину зазора паралельно до обкладинок заповнили однорідним діелектриком з проникністю ϵ так, що напруга при цьому на конденсаторі не змінилася. Знайти напруженість поля і електричне зміщення в обох частинах зазора.

$$\text{Відповідь: } E_1 = E_0; E_2 = E_0/\epsilon; D_1 = D_2 = \epsilon_0 E_0.$$

III. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

§ 15. Електричний струм

У речовинах, які називаються провідниками, є заряджені частинки, які здатні майже вільно пересуватися. У стані термодинамічної рівноваги вони беруть участь у тепловому хаотичному русі, тобто усі напрямки руху частинок рівноймовірні, і сумарний заряд, який переноситься через будь-який поперечний переріз провідника, дорівнює нулю. Якщо через деяку поверхню переноситься сумарний заряд, відмінний від нуля, кажуть, що через цю поверхню тече електричний струм. Струм може текти в різних середовищах: твердих тілах, рідинах і газах.

Наявність у даному тілі заряджених частинок, які можуть переміщатися у межах всього тіла, необхідна для протікання струму, вони називаються носіями струму. (Це електрони, іони, будь-які заряджені частинки).

Струм виникає за умови, що всередині тіла існує електричне поле. За відсутності поля носії заряду беруть участь у тепловому русі, проте $\langle \vec{v} \rangle = 0$. При включенні поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух зі швидкістю \vec{u} . Істинна швидкість частинки дорівнює $\vec{v} + \vec{u}$. Оскільки спостережувані значення пов'язані із середніми значеннями мікроскопічних величин, усереднимо отриманий вираз з урахуванням того, що $\langle \vec{v} \rangle = 0$. Тоді отримаємо:

$$\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle.$$

Отже, електричний струм можна визначити як впорядкований рух електричних зарядів.

Для кількісної характеристики електричного струму використовують величину заряду, що переноситься через поверхню, яка розглядається, в одиницю часу. Її називають силою струму. Сила струму є потік заряду через поверхню.

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Якщо носіями є як позитивні, так і негативні заряди, то:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{|dq^-|}{dt}.$$

За напрям струму беруть напрям, в якому рухаються позитивні заряди.

Для більш детальної характеристики струму вводять густину струму – це заряд, який переноситься в одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до струму:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Тоді:

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}).$$

Густина струму є вектором. За напрямок вектора густини струму \vec{j} домовилися приймати напрямок швидкості руху позитивних зарядів \vec{u}^+ . З останнього співвідношення видно, що сила струму, який протікає через деяку площу S , дорівнює потоку вектора густини струму через цю поверхню.

Густина струму дорівнює густині потоку заряду. Поступаючи так само, як в молекулярній фізиці при обчисленні густини, наприклад, потоку тепла, для густини струму, у разі наявності позитивно і негативно заряджених носіїв струму, можна отримати вираз:

$$j = e^+ n^+ u^+ + |e^-| n^- u^-.$$

Тут e^+ та e^- – величини зарядів позитивних і негативних носіїв, n^+ та n^- – їхні концентрації відповідно. Або у векторній формі:

$$\vec{j} = e^+ n^+ \vec{u}^+ + e^- n^- \vec{u}^-.$$

Струм, який не змінюється з часом, називається постійним.

$$I = \frac{q}{t}.$$

Одиниця сили струму – ампер – основна одиниця у системі СІ. 1 кулон – це заряд, який переноситься за 1 с через поперечний переріз провідника при силі струму в 1 А.

Якщо взяти замкнену поверхню, то повний струм, що протікає через цю поверхню, можна записати у вигляді:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = - \frac{dq}{dt},$$

де $-\frac{dq}{dt}$ – зменшення заряду всередині замкненої поверхні. Перетворимо цей вираз. Заряд всередині поверхні є:

$$q = \int_V \rho dV,$$

де ρ – об'ємна густина заряду. Тоді:

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

За теоремою Остроградського–Гауса $\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV$,

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

звідки, у силу довільності вибраного об'єму, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Це рівняння називається рівнянням неперервності. Воно виражає закон збереження заряду. Тобто в точках, які є джерелами вектора густини струму \vec{j} , відбувається зменшення заряду. У випадку стаціонарного струму:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

тобто у випадку постійного струму вектор \vec{j} не має джерел. Це означає, що лінії струму ніде не починаються і ніде не закінчуються, тобто лінії постійного струму завжди замкнені.

§ 16. Електрорушійна сила

Якщо по провіднику протікає електричний струм, це означає, що у провіднику існує електричне поле, для постійного струму це поле повинно бути стаціонарним. Для підтримки струму досить тривалий час потрібно від кінця провідника з меншим потенціалом (для позитивних носіїв) неперервно відводити принесені струмом заряди, а до кінця з більшим потенціалом неперервно їх підводити. Тобто необхідно здійснити круговорот зарядів. Це узгоджується з тим, що, як зазначено вище, лінії постійного струму повинні бути замкнені.

Отже, поряд з ділянками, де позитивні заряди рухаються у бік зменшення потенціалу φ , повинні бути ділянки, де вони рухатимуться у протилежну сторону, проти сил електростатичного поля, значить на цих ділянках мають діяти сили неелектростатичного походження, які називаються сторонніми силами. Вони можуть бути обумовлені хімічними процесами, дифузією носіїв в неоднорідному середовищі або через межу двох різнорідних

речовин, електричними полями, які породжуються мінливими в часі магнітними полями.

Сторонні сили можна охарактеризувати роботою, яку вони здійснюють над зарядами, що переміщуються по колу. Величина, що дорівнює роботі сторонніх сил над одиничним позитивним зарядом, називається електрорушійною силою е.р.с. \mathcal{E} , яка діє у колі або на його ділянці.

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q},$$

розмірність електрорушійної сили \mathcal{E} збігається з розмірністю потенціалу електричного поля φ .

Сторонню силу можна представити у вигляді:

$$\vec{F}_{\text{ст}} = \vec{E}^* q,$$

де \vec{E}^* – напруженість поля сторонніх сил.

Робота сторонніх сил при переміщенні заряду з точки 1 у точку 2 є:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_{\text{ст}} d\vec{l} = q \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* d\vec{l},$$

звідки

$$\mathcal{E}_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Для е.р.с. \mathcal{E} у замкненому колі:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^* d\vec{l}$$

– електрорушійна сила, що діє у замкненому колі, дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил.

За наявності електростатичного поля повна сила, що діє на заряд, запишеться у вигляді:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{ст}} = q(\vec{E} + \vec{E}^*),$$

на ділянці 1–2:

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q \mathcal{E}_{12}.$$

Величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконують електростатичні і сторонні сили при переміщенні одиничного позитивного заряду, називається спадом напруги або просто напругою U на даній ділянці кола.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Ділянка кола, де не діють сторонні сили, називається однорідною. В іншому випадку вона називається неоднорідною. Для однорідної ділянки:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

тобто, напруга на однорідній ділянці кола збігається з різницею потенціалів на кінцях цієї ділянки.

§ 17. Закон Ома. Опір провідників

На підставі експериментальних досліджень залежності між струмом і напругою Г. Ом встановив закон: сила струму, який тече по однорідному провіднику, пропорційна спаду напруги U на провіднику

$$I = \frac{1}{R} U, \quad (U = \varphi_1 - \varphi_2).$$

Опір $R = \rho \frac{l}{S}$ Ом, де l – довжина провідника, S – площа його поперечного перерізу, ρ – питомий опір провідника, тобто опір провідника довжиною 1 м і площею поперечного перерізу 1 м². Цей вираз є справедливим для ізотропного провідника.

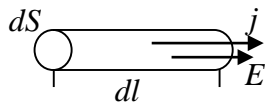


Рис. 3.1.

Питомий опір залежить від матеріалу і температури провідника. Розглянемо нескінченно малий елемент провідника довжиною dl і площею поперечного перерізу dS (рис. 3.1). Густина струму в ньому буде збігатися за напрямом з вектором напруженості електричного поля. Тоді легко отримати співвідношення:

$$I = j \cdot dS = \frac{1}{R} U = \frac{dS}{\rho dl} E dl,$$

звідки:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}.$$

Останнє співвідношення називається законом Ома у диференціальній формі. Величина σ , обернена питомому опору, називається провідністю провідника.

Залежність питомого опору від температури в області кімнатних температур пропорційна температурі $\rho \sim T$, в області низьких температур вона носить більш складний характер. При прямуванні температури до абсолютного нуля опір прямує до деякої кінцевої величини, яка називається залишковим опором $\rho_{зал}$. Однак така поведінка спостерігається не для усіх матеріалів (рис. 3.2).

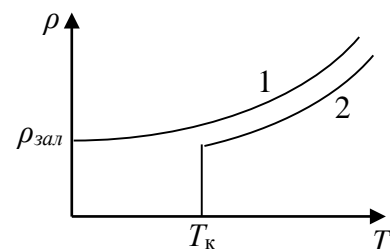


Рис. 3.2.

У 1911 р. Г. Камерлінг-Оннес, який у 1908 р. отримав рідкий гелій, досліджуючи температурну залежність питомого опору ртуті, відкрив явище,

яке отримало назву надпровідності. Явище полягає у тому, що за певної температури, яка називається критичною – T_k , опір провідника стрибком обертається у нуль. Для ртуті $T_k = 4,2$ К. Явище надпровідності має досить складну природу і не може бути пояснено у рамках класичної фізики. Характерною особливістю надпровідного стану, крім відсутності опору протіканню струму, є витіснення магнітного поля з об'єму надпровідника – ефект Мейснера–Оксенфельда. Цей ефект має місце в обмеженій області магнітних полів. Якщо напруженість зовнішнього магнітного поля перевищує деяке значення, яке називається критичним, надпровідний стан руйнується. Основи теорії надпровідності були створені Дж. Бардіном, Л. Купером та Дж. Р. Шріффером. Вона отримала назву теорія БКШ, за першими літерами прізвищ авторів.

§ 18. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Розглянемо нескінченно малий елемент dl неоднорідної ділянки кола, площа поперечного перерізу якої S , закон Ома у диференціальній формі запишеться у вигляді:

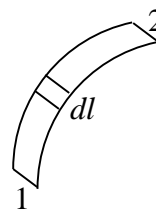


Рис. 3.3.

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

У проєкції на напрямок dl отримаємо:

$$j_l = \sigma(E_l + E_l^*).$$

Підставляючи густину струму через силу струму і площу поперечного перерізу і помножуючи обидві частини рівності на dl :

$$I \frac{\rho}{S} = E_l + E_l^* | \times dl,$$

після інтегрування по всій довжині виділеної ділянки кола:

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 E_l^* dl,$$

остаточно отримаємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Для замкненого кола:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де R – повний опір кола.

§ 19. Правила Кірхгофа

Для розрахунку розгалужених кіл використовуються прості правила, які були сформульовані Г. Р. Кірхгофом. Цих правил два.

1. Алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\Sigma I_i = 0.$$

Вузлом кола називається точка, в якій сходяться три і більше провідників. Струм, що втікає у вузол, вважається позитивним, що витікає – негативним.

2. Алгебраїчна сума спадів напруги в замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с., що діють у контурі.

$$\Sigma I_i R_i = \mathcal{E}_i.$$

При додаванні рівнянь за другим правилом Кірхгофа довільно обирають напрямок обходу контуру – довільної замкненої ділянки кола. Струм вважається позитивним, якщо його напрямок збігається з напрямком обходу контура, і негативним в іншому випадку.

Е.р.с. вважається позитивною, якщо при обході контура всередині джерела рухатися від негативного полюса «-» до позитивного «+».

Як приклад розглянемо коло, показане на рисунку 3.4. Будемо вважати, що опори і е.р.с. задані. Напрямки обходу кожного з контурів показані стрілками. Нехай необхідно знайти напругу на резисторі R_3 :

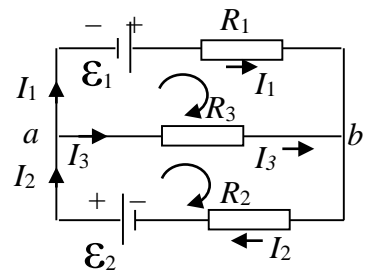


Рис. 3.4.

$$U_3 = \varphi_a - \varphi_b = I_3 R_3.$$

Скористаємося першим правилом Кірхгофа для вузла a (зауважимо, що застосування цього ж правила для вузла b дасть, з точністю до знаку, те ж саме рівняння) і другим правилом для вибраних контурів. В результаті отримаємо систему лінійних рівнянь для струмів:

$$\left. \begin{aligned} I_2 - I_1 - I_3 &= 0 \\ I_1 R_1 - I_3 R_3 &= \varepsilon_1 \\ I_3 R_3 + I_2 R_2 &= \varepsilon_2 \end{aligned} \right\}$$

Звідси знаходимо I_3 :

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_1 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}.$$

Підставляючи знайдене значення струму у вираз для напруги, остаточно отримаємо:

$$U_3 = \varphi_a - \varphi_b = \frac{(\varepsilon_2 R_1 - \varepsilon_1 R_2) R_3}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}.$$

Отримана на основі правил Кірхгофа система дає змогу розрахувати струми, які протікають в усіх ділянках кола.

§ 20. Потужність струму

Нехай є довільна ділянка кола постійного струму, напруга на кінцях якої U . За час t через поперечний переріз провідника переноситься заряд $q = It$ (тут враховано, що струм постійний). При цьому сили електростатичного поля і сторонні сили виконують роботу:

$$A = Uq = UIt.$$

Тоді потужність, що виділяється на даній ділянці кола, є:

$$P = \frac{A}{t} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \varepsilon_{12}I.$$

Ця потужність, в загальному випадку, витрачається на виконання ділянкою кола, яка розглядається, роботи над зовнішніми тілами, на нагрівання цієї ділянки кола, на протікання хімічних реакцій.

Знайдемо питому потужність, тобто потужність, що виділяється в одиниці об'єму провідника. Нехай в довільному об'ємі провідника ΔV виділяється потужність ΔP , тоді:

$$P_{\text{пит}} = \frac{\Delta P}{\Delta V}.$$

При русі одного носія заряду діючі на нього сили з боку електростатичного поля і сторонні сили розвивають потужність:

$$P' = \vec{F}\vec{V} = e(\vec{E} + \vec{E}^*)(\vec{v} + \vec{u}).$$

Усереднивши, знайдемо потужність, що виділяється при русі одного носія:

$$\langle P' \rangle = e(\vec{E} + \vec{E}^*)\langle \vec{u} \rangle.$$

Помноживши на число носіїв у розглянутому об'ємі, знайдемо потужність, яка в ньому виділяється

$$\Delta P = \langle P' \rangle n \Delta V = e(\vec{E} + \vec{E}^*)\langle \vec{u} \rangle n \Delta V = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*)\Delta V.$$

Поділивши на об'єм, остаточно отримаємо:

$$P_{\text{пит}} = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Цей вираз визначає потужність, що виділяється в одиниці об'єму провідника, по якому тече постійний струм.

§ 21. Закон Джоуля–Ленца

Розглянемо випадок, коли провідник, по якому тече струм, нерухомий, і хімічних перетворень в ньому не відбувається, тоді робота струму буде витрачатися на збільшення внутрішньої енергії провідника, в результаті провідник буде нагріватися. У цьому випадку говорять, що при протіканні струму в провіднику виділяється певна кількість теплоти:

$$Q = IUt.$$

Враховуючи, що $U = RI$, отримаємо формулу:

$$Q = I^2 Rt.$$

Це співвідношення було встановлено експериментально Дж. П. Джоулем і незалежно Е. Х. Ленцем і має назву закону Джоуля–Ленца.

Якщо сила струму змінюється з часом, то кількість теплоти, яка виділяється, можна знайти інтегруванням:

$$Q = \int_0^t RI^2 dt.$$

Від інтегральної форми закону, яка характеризує кількість теплоти, що виділяється у всьому об'ємі, можна перейти до виразу, котрий характеризує виділення тепла у різних місцях провідника.

Виділивши нескінченно малий циліндричний об'єм dS (рис. 3.5), отримаємо, що за час dt в ньому виділиться:

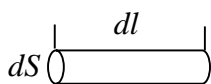


Рис. 3.5.

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{aS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dS dl dt \left| \times \frac{1}{dV dt} \right.$$

Поділивши отриманий вираз на об'єм і час, остаточно отримаємо:

$$Q_{\text{пит}} = \rho j^2.$$

Ця величина характеризує кількість теплоти, яка виділяється в одиницю часу в одиниці об'єму, тому $Q_{\text{пит}}$ називається питомою тепловою потужністю струму. Останній вираз називається законом Джоуля–Ленца у диференціальній формі. Враховуючи, що $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}$, його можна переписати у вигляді:

$$Q_{\text{пит}} = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E}.$$

Джоуль і Ленц встановили закон для однорідної ділянки кола, проте у викладках ми ніде не робили цього припущення, отже, закон справедливий як для однорідної, так і для неоднорідної ділянки кола.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ ТА ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ III

Електричний струм, що виникає у провідних середовищах внаслідок упорядкованого руху вільних зарядів під дією електричного поля, називається струмом провідності (наприклад, струм в металах, напівпровідниках, електролітах – це впорядкований рух вільних електронів або іонів).

За напрям струму прийнято вважати напрям упорядкованого руху позитивних зарядів.

Сила струму:

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.1)$$

де dq – заряд, який переноситься через поверхню (наприклад, поперечний переріз провідника) за малий проміжок часу dt .

Для постійного струму:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (3.2)$$

де q – весь заряд, який переноситься за проміжок часу від 0 до t .

Вектор густини потоку \vec{j} чисельно дорівнює:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}, \quad (3.3)$$

де dI – сила струму через малий елемент поверхні dS_{\perp} , нормальний до напрямку руху носіїв заряду. Напрямок вектора \vec{j} збігається з напрямком швидкості позитивних носіїв заряду. Так, в металах цей вектор напрямлений протилежно вектору швидкості вільних електронів, а за величиною дорівнює:

$$j = enu, \quad (3.4)$$

де $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона (за абсолютною величиною),

n – концентрація, u – середня швидкість упорядкованого руху електронів.

Надаючи векторний сенс елементу поверхні $d\vec{S}$, із (3.3) отримаємо:

$$I = \int_{(S)} (\vec{j} \cdot d\vec{S}), \quad (3.5)$$

тобто скаляр I є потоком вектора \vec{j} через поверхню S .

Постійний струм підтримується завдяки включенню в коло джерел струму. В них неелектростатичні – сторонні – сили розділяють різнойменні заряди і забезпечують різницю потенціалів на кінцях провідника. Джерело характеризується електрорушійною силою (е.р.с.):

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{12}^{стор}}{q}, \quad A_{12}^{стор} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}^{стор} \cdot d\vec{l}). \quad (3.6)$$

Тут $A_{12}^{стор}$ – робота сторонньої сили $\vec{F}^{стор}$ поз переміщення заряду q на ділянці 1–2.

Закон Ома для ділянки кола, до якого включено джерело (таку ділянку називають неоднорідною):

$$U_{12} = IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (3.7)$$

$\varepsilon_{12} > 0$, якщо ділянка 1–2 проходиться всередині джерела від негативного полюса до позитивного. В іншому випадку $\varepsilon_{12} < 0$. Величину U_{12} називають спадом напруги на ділянці. R – опір, який для однорідних ізотропних провідників циліндричної форми довжини l з площею поперечного перерізу S розраховується за формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.8)$$

де ρ – питомий опір матеріалу.

Для ділянки кола, що не містить джерел (однорідної) з (3.7), вважаючи $\varepsilon_{12} = 0$, отримаємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.9)$$

У диференціальній формі закон Ома для однорідної ділянки кола пов'язує густину струму з вектором напруженості електричного поля \vec{E} :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3.10)$$

де $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – питома провідність матеріалу.

Кількість теплоти δQ , яка виділяється у провіднику з опором R при проходженні по ньому струму I за малий проміжок часу dt , відповідно до закону Джоуля–Ленца, дорівнює:

$$\delta Q = I^2 R dt. \quad (3.11)$$

Тепло, виділене за проміжок часу від 0 до τ :

$$Q = \int_0^\tau I^2 R dt. \quad (3.12)$$

Цей же закон у диференціальній формі дає змогу розрахувати питому теплову потужність струму (тобто кількість теплоти, що виділяється в одиницю часу в одиничному об'ємі):

$$Q_{num} = \rho j^2. \quad (3.13)$$

У розгалужених колах опір ділянки, що не містить джерел струму, розраховують за такими формулами:

1) при послідовному з'єднанні:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k, \quad (3.14)$$

2) при паралельному з'єднанні:

$$R = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}. \quad (3.15)$$

Для розрахунку довільного розгалуженого кола користуються правилами Кірхгофа.

Перше (правило вузлів): алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^m I_k = 0, \quad (3.16)$$

де m – число провідників, що сходяться у вузлі ($m > 2$). $I_k > 0$ для струму, що втікає у вузол, $I_k < 0$ – для струмів, що витікають.

Друге (правило контурів): алгебраїчна сума спадів напруги у довільному контурі, виділеному в розгалуженому колі, дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с., що діють в цьому контурі:

$$\sum_{k=1}^m I_k R_k = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k, \quad (3.17)$$

де m – число окремих ділянок, на які контур розбивається вузлами. Позитивними вважаються струми, напрямок яких збігається з напрямком обходу контура. Знак е.р.с. визначається як зазначено раніше.

Приклади розв'язання задач

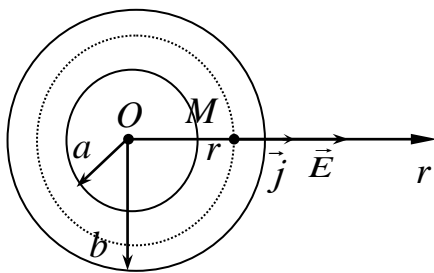
Задача 1. Однорідне слабкопровідне середовище з питомим опором ρ заповнює простір між двома коаксіальними ідеально провідними тонкими циліндрами. Радіуси циліндрів a та b , причому $a < b$, довжина кожного циліндра l . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти опір середовища між циліндрами.

Розв'язання

$a < b$
l
ρ
$R - ?$

Запропонована конструкція ідеально проводить струм в осьовому напрямку, але чинить опір струму, який тече радіально, від внутрішнього до зовнішнього циліндра. На рис. 3.6 зображено переріз, перпендикулярний до осі циліндрів O , і проведена інша, перпендикулярна до першої, вісь Or . Система має циліндричну симетрію, тому, нехтуючи

крайовими ефектами, можна стверджувати, що взяті у довільній точці M



вектори напруженості \vec{E} та густини струму \vec{j} спрямовані вздовж осі Or , а їхні модулі залежать тільки від радіальної координати r цієї точки.

Щоб отримати залежність $j(r)$, проведемо через точку M циліндричну поверхню і запишемо вираз для сили струму I ,

Рис. 3.6.

який тече крізь неї. Згідно з (3.5), сила струму – це потік вектора j , у цьому разі він дорівнює:

$$I = 2\pi r l j. \tag{1}$$

У стаціонарній задачі сила струму не залежить від r , інакше заряд, який залишив внутрішній циліндр (радіуса a) не дорівнював би заряду, який потрапив на зовнішній (радіуса b). Тобто $I \neq I(r)$, $I = \text{const}$. Тоді з (1) отримаємо:

$$j = \frac{I}{2\pi l r}. \tag{2}$$

За законом Ома у диференціальній формі (3.10):

$$E = \rho j = \frac{I\rho}{2\pi l r}. \tag{3}$$

Оскільки $\vec{E} = -grad\varphi$, у випадку циліндричної симетрії: $E_r = -\frac{d\varphi}{dr}$, для потенціалу φ , використовуючи (3), отримаємо диференціальне рівняння:

$$d\varphi = -\frac{\rho I}{2\pi l r} dr. \quad (4)$$

Інтегрування його дає:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = -\frac{\rho I}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}, \quad (5)$$

$$U = \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\rho}{2\pi l} I \ln \frac{b}{a}. \quad (6)$$

За законом Ома $U = RI$, отже, опір цієї системи:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Другий спосіб розв'язання задачі. У цій задачі струм тече радіально. Виділимо циліндричний шар радіуса r і товщини dr . Площа поверхні цього шару, через який тече струм, дорівнює $2\pi r l$. Опір шару визначимо за формулою:

$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r l}. \quad (8)$$

Опір середовища між циліндрами визначимо як опір послідовно з'єднаних шарів інтегруванням:

$$R = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi l} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}, \quad (9)$$

що, звичайно, збігається з результатом, отриманим вище (7).

Задача 2. За якого опору x у колі опір між точками А і В не залежить від числа комірок (рис. 3.7)?

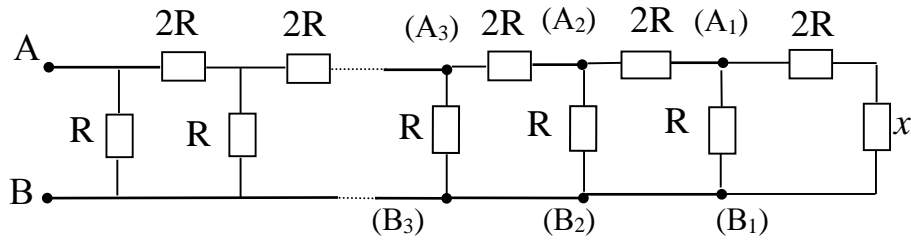


Рис. 3.7.

Розв'язання

$$\frac{R_n = R_{n-1}}{x - ?}$$

Зазначимо на схемі пари точок (A_n, B_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$. Вони відповідають граничній парі точок (A, B) за участю у схемі n комірок. Позначимо відповідний опір кола R_n . Оскільки між точками A_n і B_n завжди дві паралельні ділянки, для R_n при $n = 1, 2, 3 \dots$ справедливо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+x}, \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_1}, \\ \frac{1}{R_3} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_2}, \\ &\dots \\ \frac{1}{R_n} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+R_{n-1}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Незалежність опору кола від числа комірок означає, що:

$$R_n = R_{n-1} = R_{n-2} = \dots = R_2 = R_1, \tag{2}$$

або:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{n-1}} = \frac{1}{R_{n-2}} = \dots = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}. \tag{3}$$

Розглядаючи перші два рівняння системи (1), зауважимо, що $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$

тільки при

$$R_1 = x. \quad (4)$$

Тоді з першого рівняння випливає:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R+x}. \quad (5)$$

Нехай $x \neq 0$ (очевидно, що $R \neq 0$). Тоді рівняння (5) зводиться до квадратного:

$$x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0, \quad (6)$$

з двох розв'язків якого:

$$x_{1,2} = (\pm\sqrt{3} - 1)R, \quad (7)$$

фізичний зміст має тільки додатній розв'язок:

$$x_1 = (\sqrt{3} - 1)R. \quad (8)$$

Задача 3. До джерела постійного струму з внутрішнім опором R_0 підключили три однакові опори R , які з'єднані між собою, як показано на рис. 3.8. При якому значенні R теплова потужність, що виділяється на цій ділянці, буде максимальною?

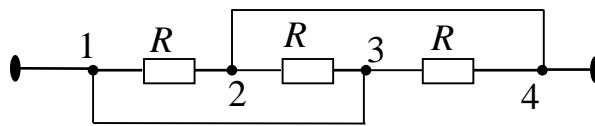


Рис. 3.8.

Розв'язання

У схемі точки 1 та 3 з'єднані накоротко, тому їхні потенціали однакові:

$$\varphi_1 = \varphi_3. \quad (1)$$

R_0
$P \rightarrow \max$
$R - ?$

Аналогічно:

$$\varphi_2 = \varphi_4. \quad (2)$$

Тоді схему можна замінити на еквівалентну їй, об'єднавши точки, потенціали яких попарно збігаються (рис. 3.9).

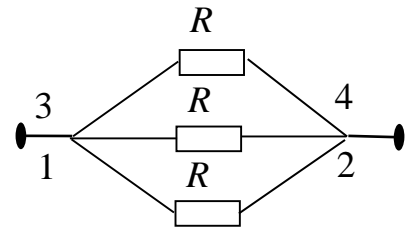


Рис. 3.9.

Тепер видно, що ділянка представляє собою паралельне з'єднання трьох провідників з опором R , та її опір, згідно з (3.15), дорівнює:

$$R_{\text{пар}} = \frac{R}{3}. \quad (3)$$

При підключенні ділянки до джерела з деякою е.р.с. ε і внутрішнім опором R_0 по ній тече струм:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{пар}} + R_0} = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{3} + R_0}, \quad (4)$$

виділяючи на ділянці теплову потужність:

$$P = I^2 R_{\text{пар}} = \frac{\varepsilon^2 \frac{R}{3}}{\left(\frac{R}{3} + R_0\right)^2} = \frac{3\varepsilon^2 R}{(R + 3R_0)^2}. \quad (5)$$

Ця потужність максимальна, коли максимальна функція:

$$f(R) = \frac{R}{(R + 3R_0)^2} \rightarrow \text{max}. \quad (6)$$

Диференціюючи її і прирівнюючи до нуля похідну, отримуємо:

$$\frac{df}{dR} = \frac{(3R_0 - R)}{(R + 3R_0)^3} = 0, \quad (7)$$

звідки остаточно $R = 3R_0$.

Задача 4. Знайти різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між обкладинками конденсатора C схеми, якщо $\varepsilon_1 = 4$ В, $\varepsilon_2 = 1$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом. Внутрішні опори джерел нехтовно малі.

Розв'язання

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1 = 4\text{В} \\ \varepsilon_2 = 1\text{В} \\ R_1 = 10\text{ Ом} \\ R_2 = 30\text{ Ом} \\ R_3 = 20\text{ Ом} \end{array}$$

$$\varphi_A - \varphi_B = ?$$

У схемі три ділянки з опорами R_1, R_2, R_3 . Через них течуть струми I_1, I_2, I_3 відповідно, напрямки яких виберемо довільно. По ділянці АВ, яка містить конденсатор, струм не протікає. Точки А і В можуть розглядатися як кінці інших ділянок, наприклад, ВD і DA. Застосуємо до цих ділянок закон Ома (3.7), враховуючи, що на ВD відсутнє джерело е.р.с., а на DA немає спаду напруги через відсутність опору:

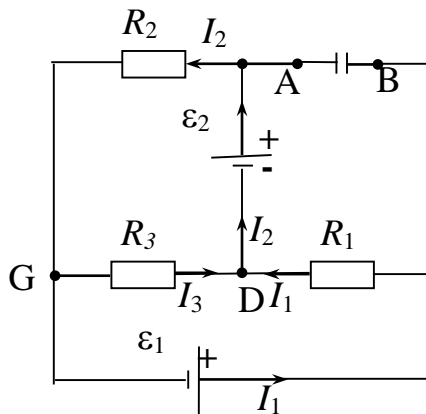


Рис. 3.10.

$$I_1 R_1 = \varphi_B - \varphi_D, \quad (1)$$

$$0 = \varphi_D - \varphi_A + \varepsilon_2.$$

Додавши ці рівняння, після перетворень отримаємо:

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_2 - I_1 R_1. \quad (2)$$

Такий самий результат виходить з розгляду АDB як єдиної ділянки, для якої

$$-I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_2.$$

Задача зводиться до знаходження струму I_1 .

Використовуючи друге правило Кірхгофа (3.17) для контура, який містить опори R_2 та R_3 :

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2, \quad (3)$$

і для контура, який містить R_1 та R_3 :

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 = \varepsilon_1. \quad (4)$$

Тут обидва контури обходяться проти годинникової стрілки. Для вузла D, згідно з першим правилом Кірхгофа, запишемо:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (5)$$

Рівняння (3)–(5) запишемо у вигляді системи:

$$\begin{cases} R_2 I_2 + R_3 I_3 = \varepsilon_2, \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = \varepsilon_1, \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Зауважимо, що за другим правилом отримуємо на одне рівняння менше, ніж кількість контурів у схемі (третьою можливий контур – це поєднання перших двох), а за першим – на одне менше, ніж кількість вузлів (у схемі є також вузол G). Розгляд усіх контурів і вузлів додав би рівняння, що представляють собою лінійні комбінації вже написаних.

Розв'язуючи систему (6) (наприклад, за правилом Крамера), отримуємо:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \quad (7)$$

Підставляючи числові дані, розрахуємо струм I_1 :

$$I_1 = \frac{4 \cdot 50 + 20}{10 \cdot 30 + 30 \cdot 20 + 10 \cdot 20} = 0,2 \text{ (A)}.$$

Тоді, за формулою (2), остаточно отримаємо:

$$\varphi_A - \varphi_B = 1 - 0,2 \cdot 10 = -1 \text{ (В)}.$$

Отже, потенціал обкладинки А конденсатора нижче, ніж обкладинки В. Вона заряджена негативно.

Задача 5. Резистор з опором R і нелінійний опір, вольт-амперна характеристика якого має вигляд $U = a\sqrt{I}$, де a – стала, з'єднані послідовно і підключені до джерела напруги U_0 . Знайти струм у колі.

Розв'язання

R $U = a\sqrt{I}$ $a = \text{const}$ U_0 <hr style="width: 100%;"/> $I - ?$	Запропоноване електричне коло має вигляд, показаний на рис. 3.11. Для звичайного резистора (ділянка 2–3), який ще називають лінійним опором, спад напруги пов'язаний зі струмом лінійною залежністю (законом Ома):
---	--

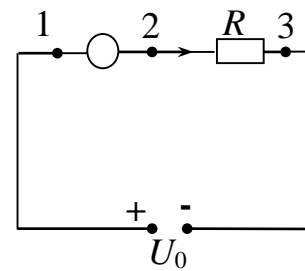


Рис. 3.11.

$$U_{23} = RI. \quad (1)$$

Для нелінійного опору (ділянка 1–2) зв'язок цих величин складніший:

$$U_{12} = a\sqrt{I}, \quad a = \text{const}. \quad (2)$$

Завдяки послідовному підключенню цих опорів до джерела напруги, можна записати:

$$U_0 = U_{12} + U_{23},$$

або

$$U_0 = a\sqrt{I} + RI. \quad (3)$$

Вводячи позначення:

$$\sqrt{I} = x, \quad (4)$$

з рівняння (3) після перетворень отримуємо:

$$x^2 + \frac{a}{R}x - \frac{U_0}{R} = 0. \quad (5)$$

З двох коренів даного квадратного рівняння умову (4) задовольняє лише один – додатній корінь:

$$x = \frac{a}{2R} \left[\sqrt{1 + \frac{4RU_0}{a^2}} - 1 \right]. \quad (6)$$

Отже, струм в колі дорівнює:

$$I = x^2 = \left(\frac{a}{2R} \right)^2 \left[\sqrt{1 + \frac{4RU_0}{a^2}} - 1 \right]^2. \quad (7)$$

Задача 6. Плоский конденсатор, заповнений діелектриком з проникністю $\varepsilon = 2,1$, втрачає за час $\tau = 3$ хв половину наданого йому заряду. Вважаючи, що втрата заряду відбувається лише через діелектричну прокладку, знайти її питомий опір.

Розв'язання

$\varepsilon = 2,1$
$\tau = 180 \text{ с}$
$q(\tau) = \frac{1}{2} q(0)$
$\rho - ?$

Через недосконалість діелектрика, що заповнює конденсатор, він втрачає заряд, тобто між його обкладинками тече струм. Цей струм непостійний (або нестационарний), але час, за який він суттєво змінюється, набагато більший за час, необхідний для передачі

інформації про зміну будь-яких електричних величин у колі (ця інформація розповсюджується зі швидкістю світла). Такі струми називають квазістационарними, для них також справедливий закон Ома (3.9):

$$U = IR. \quad (1)$$

Стосовно даної задачі, R – опір середовища між обкладинками конденсатора, який дорівнює:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2)$$

U – напруга на конденсаторі, пов'язана з зарядом q позитивної обкладинки і ємністю C :

$$U = \frac{q}{C}, \quad (3)$$

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l}. \quad (4)$$

Тут l – відстань між обкладинками, S – площа обкладинки. За визначенням струму:

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (5)$$

Мінус узятий тому, що заряд позитивної обкладки спадає, а формули (1) і (3) пов'язують позитивні величини.

Підставляючи в (1) вирази (2)–(5), отримуємо диференціальне рівняння, яке описує зміну заряду конденсатора з часом:

$$q \frac{l}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = -\rho \frac{l}{S} \frac{dq}{dt}. \quad (6)$$

Перетворимо його до виду:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{\rho\varepsilon\varepsilon_0} dt \quad (7)$$

і, проінтегрувавши в границях $0 < t < \tau$, отримаємо:

$$\ln \frac{q(\tau)}{q(0)} = -\frac{\tau}{\rho\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Звідси:

$$\rho = \frac{\tau}{\left(\varepsilon\varepsilon_0 \ln \frac{q(0)}{q(\tau)}\right)} = \frac{\tau}{\varepsilon\varepsilon_0 \ln 2}. \quad (9)$$

Підстановка числових значень дає $\rho = 1,4 \cdot 10^{13}$ Ом·м.

Як бачимо, величина досить велика, але кінцева. Для ідеального ізолятора було $\rho \rightarrow \infty$, і характерний час розрядки $\tau \rightarrow \infty$.

Задача 7. У схемі, показаній на рис. 3.12, ємності обох конденсаторів дорівнюють C , опір дорівнює R . Один з конденсаторів (наприклад, лівий) зарядили до напруги U_0 і в момент часу $t = 0$ замкнули ключ K . Знайти струм I в колі як функцію часу t , а також кількість тепла, що виділилася за весь час процесу.

Розв'язання

U_0		За $t = 0$ заряд позитивної обкладинки лівого конденсатора (рис. 3.12) дорівнює:
C		
R		

$I = I(t) - ?$		$q_0 = U_0 C,$
$Q - ?$		

За $t = 0$ заряд позитивної обкладинки лівого конденсатора (рис. 3.12) дорівнює:

$$q_0 = U_0 C,$$

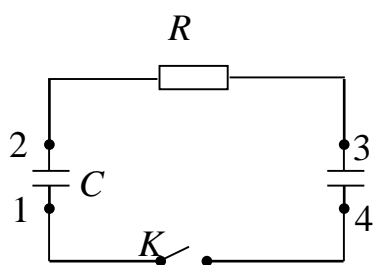


Рис. 3.12

а правий конденсатор не заряджений. Пронумеруємо точки, відповідні обкладинкам конденсаторів, як показано на рис. 3.12. Нехай точка 2 відповідає позитивній обкладинці. Тоді після замикання ключа через опір R потече струм розрядки, напрямлений від точки 2 до точки 3.

Цей квазістаціонарний струм (див. попередню задачу) також підпорядковується закону Ома (3.9):

$$IR = \varphi_2 - \varphi_3. \quad (1)$$

Додаючи у правій частині потенціал φ_4 , віднімаючи рівний йому потенціал φ_1 (вони однакові через відсутність опору на ділянці 4–1) і користуючись співвідношенням попередньої задачі:

$$I = - \frac{dq}{dt}, \quad (2)$$

отримаємо:

$$-\frac{dq}{dt}R = U_{\text{лів}} - U_{\text{прав}}, \quad (3)$$

де $U_{\text{лів}}$ і $U_{\text{прав}}$ – напруги на лівому і на правому конденсаторах відповідно.

Вони пов'язані з їхніми зарядами:

$$U_{\text{лів}} = \frac{q}{C}, \quad U_{\text{прав}} = \frac{q_0 - q}{C}, \quad (4)$$

в останній формулі враховано, що сумарний заряд позитивних обкладинок обох конденсаторів залишається постійним і дорівнює q_0 .

Підставляючи (4) в (3), отримаємо диференціальне рівняння:

$$-\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} - \frac{q_0 - q}{C}, \quad (5)$$

яке перетвориться до виду:

$$\frac{dq}{q - \frac{q_0}{2}} = -\frac{2}{RC} dt. \quad (6)$$

Інтегрування за початкової умови $q(0) = q_0$, дає

$$\ln\left(\frac{2q}{q_0} - 1\right) = -\frac{2t}{RC}. \quad (7)$$

Потенціюючи, отримаємо залежність заряду від часу:

$$q = \frac{q_0}{2} \left(1 + e^{-\frac{2}{RC}t}\right), \quad (8)$$

тоді, згідно з (2), струм змінюється за законом:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t}, \quad (9)$$

тобто експоненціально спадає від найбільшого значення $\frac{U_0}{R}$ до 0 за нескінченний час ($t \rightarrow \infty$). Однак, кількість тепла, що виділяється при цьому – величина кінцева. Згідно з (3.12), вона дорівнює:

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty \left[\frac{U_0}{R} e^{-\frac{2}{RC}t} \right]^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{4}{RC}t} dt = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (10)$$

Такий самий результат виходить із закону збереження енергії. Спочатку вся енергія запасена в одному, зарядженому зарядом q_0 , конденсаторі та дорівнює:

$$W_0 = \frac{CU_0^2}{2}. \quad (11)$$

У кінці процесу заряд q_0 розподілиться порівну між обома конденсаторами, оскільки їхні ємності однакові і енергія кожного буде дорівнювати:

$$W_1 = \frac{\left(\frac{q_0}{2}\right)^2}{2C} = \frac{CU_0^2}{8}. \quad (12)$$

Енергія обох конденсаторів:

$$W_2 = 2W_1 = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (13)$$

Менша за початкову. Різниця дорівнює теплоті, що виділилася у результаті всього процесу:

$$Q = W_0 - W_2 = \frac{CU_0^2}{4}. \quad (14)$$

Задачі для контролю

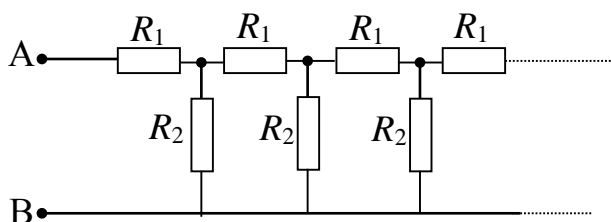


Рис. 3.13.

1. На рис. 3.13 показане нескінченне коло, утворене повторенням однієї і тієї ж ланки – опорів $R_1 = 4$ Ом та $R_2 = 3$ Ом. Знайти опір між точками А і В.

2. Зазор між обкладинками

плоского конденсатора заповнений склом з питомим опором $\rho = 100$ ГОм·м. Ємність конденсатора $C = 4$ нФ. Знайти струм витoku через конденсатор при подачі на нього напруги $U = 2$ кВ.

3. Довгий провідник круглого перерізу радіуса a виготовлений з матеріалу, питомий опір якого залежить тільки від відстані r до осі провідника за законом $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$, де α – стала. Знайти опір одиниці довжини такого провідника.

4. Знайти різницю потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між точками 1 і 2 схеми (рис. 3.14), якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\varepsilon_1 = 5$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В. Внутрішні опори джерел нехтовно малі.

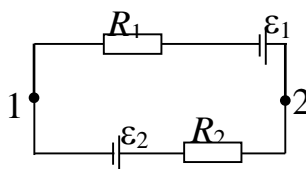


Рис. 3.14.

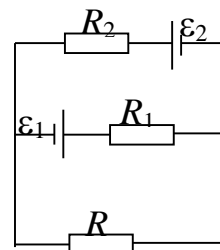


Рис. 3.15.

5. Знайти значення і напрямок струму через опір R в схемі (рис. 3.15), якщо $\varepsilon_1 = 1,5$ В, $\varepsilon_2 = 3,7$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R = 5$ Ом. Внутрішні опори джерел струму нехтовно малі.

6. Скільки тепла виділиться у спіралі з опором $R = 75$ Ом при проходженні через неї кількості електрики $q = 100$ Кл, якщо струм в спіралі рівномірно спадає до нуля протягом $\Delta t = 50$ с?

7. Довести, що розподіл струму в паралельно з'єднаних опорах R_1 і R_2 відповідає мінімуму теплової потужності, що виділяється на цій ділянці.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Конденсатор ємності $C = 400$ пФ підключили через опір $R = 650$ Ом до джерела постійної напруги U_0 . Через скільки часу напруга на конденсаторі дорівнюватиме $U = 0,9 U_0$?

Відповідь: $t = -RC \ln\left(1 - \frac{U}{U_0}\right) = 0,6$ мкс.

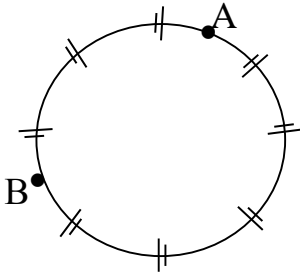


Рис. 3.16.

2. Джерела струму з різними е.р.с. з'єднані, як показано на рис. 3.16. Е.р.с. джерел пропорційні їхнім внутрішнім опорам: $\varepsilon = \alpha R$, де α – стала. Опір з'єднувальних дротів нехтовно малий. Знайти струм у колі і різницю потенціалів між точками А та В.

Відповідь: $I = \alpha$, $\varphi_A - \varphi_B = 0$.

3. У схемі на рис. 3.17 $\varepsilon = 5$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом. Внутрішній опір джерела $R = 0,1$ Ом. Знайти струми, які протікають через опори R_1 і R_2 .

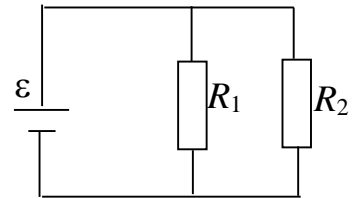


Рис. 3.17.

Відповідь: $I_1 = \frac{\varepsilon R_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R_2 R} = 1,2$ А,

$I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_2} = 0,8$ А.

4. Знайти е.р.с. і внутрішній опір джерела, еквівалентного двом паралельно з'єднаним елементам з е.р.с. ε_1 та ε_2 і внутрішніми опорамі R_1 та R_2 .

Відповідь: $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}$, $R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

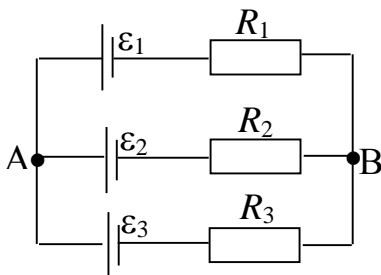


Рис. 3.18.

5. У схемі на рис. 3.18 $\varepsilon_1 = 1,5$ В, $\varepsilon_2 = 2$ В, $\varepsilon_3 = 2,5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутрішні опори джерел нехтовно малі. Знайти струм через опір R_1 і різницю потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ між точками А та В.

Відповідь: $I_1 = 0,06$ А, $\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0,9$ В.

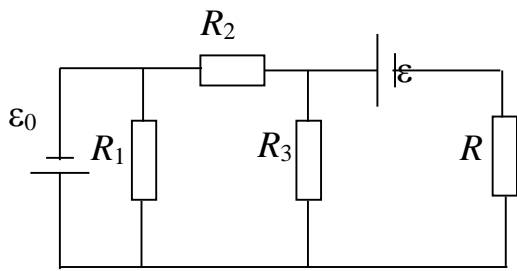


Рис. 3.19.

6. Знайти струм через опір R у схемі на рис. 3.19. Внутрішні опори джерел нехтовно малі.

Відповідь:
$$I = \frac{\varepsilon(R_2 + R_3) + \varepsilon_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

7. Скільки тепла виділиться в спіралі з опором $R = 75$ Ом при проходженні через неї кількості електрики $q = 100$ Кл, якщо струм в спіралі монотонно спадає до нуля так, що через кожні $\Delta t = 2$ с він зменшувався вдвічі?

Відповідь:
$$Q = \frac{\ln 2 \cdot q^2 R}{2\Delta t} = 0,13 \text{ МДж}.$$

8. Обкладинкам конденсатора ємністю $C = 2$ мкФ повідомили різнойменні заряди $q_0 = 1$ мКл. Потім обкладинки замкнули через опір $R = 5$ МОм. Знайти: а) заряд, який пройшов через опір за час $\tau = 2$ с;

б) кількість тепла, що виділилася в опорі за цей же час.

Відповідь: а) $q = q_0 [1 - \exp(-\tau/RC)] = 0,18$ мКл;

б) $Q = \frac{q_0^2}{2C} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\tau}{RC}\right) \right] = 82$ мДж.

IV. КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ПРОВІДНОСТІ МЕТАЛІВ

§ 22. Природа носіїв заряду в металах

Природа носіїв заряду в металах була встановлена на початку ХХ ст. Один з перших дослідів був поставлений у 1901 р. К. В. Е. Рікке, який припустив, що носіями заряду є іони. Через систему трьох однакових циліндрів, попередньо зважених, мідь-алюміній-мідь, щільно складених добре відполірованими торцями, протягом року пропускався струм одного напрямку. Ідея полягала в тому, що якщо носіями є іони, то мідний циліндр повинен стати легше, а алюмінієвий – важче. Після цього циліндри були зважені і, в межах похибки, маса не змінилася, це вказувало на той факт, що носіями заряду є не іони, а якісь інші частинки, що входять до складу всіх металів. Було зроблено припущення, що це електрони (відкриті Дж. Дж. Томсоном у 1897 р.). Оскільки носії заряду в металах починають рухатися при виникненні найменшої різниці потенціалів, тобто ведуть себе як вільні частинки, при гальмуванні вони повинні проявитися. Розглянемо такий уявний експеримент.

Нехай провідник рухається зі швидкістю \vec{v}_0 . Будемо гальмувати його з прискоренням \vec{w} . Носії набудуть прискорення $-\vec{w}$ (рис. 4.1). Таке ж прискорення можна надати носіям із зарядом e' у нерухомому провіднику, якщо створити в ньому електричне поле напруженості

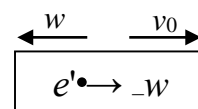


Рис. 4.1.

$$\vec{E} = -\frac{m\vec{w}}{e'}$$

тобто прикласти до його кінців різницю потенціалів (інтегрування ведеться по усій довжині провідника):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = -\int_{(1)}^{(2)} \frac{m\vec{w}}{e'} d\vec{l} = -\frac{mwl}{e'}$$

при цьому по провіднику потече струм $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R$, і за час dt буде перенесений заряд dq

$$dq = Idt = -\frac{mwl}{e'R} dt = -\frac{ml}{e'R} dv,$$

за весь час гальмування через поперечний переріз провідника буде перенесений заряд

$$q = \int_0^t dq = -\int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{mlv_0}{e'R}.$$

Вимірявши l , v_0 , R та q , можна знайти питомий заряд носіїв. Напрямок імпульсу струму дасть змогу визначити знак носіїв заряду.

У 1913 р. Л. Мандельштам і М. Папалексі поставили експеримент, що підтвердив викладену вище гіпотезу на якісному рівні. До кінців котушки, що здійснювала крутильні коливання (тобто носії заряду весь час рухалися з прискоренням, знак якого змінювався кожен чверть періоду), був приєднаний телефон, в якому було чутно шум, що свідчило про протікання струму.

У 1916 р., після створення приладу для визначення величини швидкопротікаючого заряду – балістичного гальванометра, Р. Толменом і Б. Стюартом був отриманий кількісний результат. Експеримент полягав в наступному. Котушка довжиною 500 м приводилася в обертання з лінійною швидкістю на поверхні $v = 300$ м/с, потім різко гальмувалася, і, за допомогою балістичного гальванометра, визначався заряд, що протікав за час гальмування. Значення e'/m вийшло дуже близьким до електронного – доказ того, що носіями заряду в металах є електрони. Після цього експерименту вважається остаточно встановленим той факт, що носіями заряду в металах є електрони.

Походження вільних електронів пояснюється так. При побудові кристалічної решітки метала з розплаву, атому енергетично вигідно віддати валентні електрони в міжкристалічний простір, ці колишні валентні електрони

і стають електронами провідності, а у вузлах кристалічної решітки, отже, виявляються іони. Така схема дозволяє легко оцінити концентрацію електронів провідності:

$$n = 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}.$$

§ 23. Класична теорія електропровідності металів

П. К. Л. Друде була запропонована класична теорія електропровідності металів на основі уявлень про вільні електрони. Г. Лоренц удосконалив теорію, врахувавши розподіл електронів за швидкостями, тому часто цю теорію називають теорією Друде–Лоренца.

Оскільки електрони в металі починають рухатися за найменшої різниці потенціалів, тобто ведуть себе як вільні частинки, Друде застосував до них результати добре розвиненої на той час молекулярно-кінетичної теорії газів, яка в основному була побудована у 70-х рр. XIX ст.

Основними положеннями моделі Друде є такі.

1. В інтервалі між зіткненнями не враховуються взаємодії електрона з іншими електронами або іонами. Отже, за відсутності зовнішніх полів електрони рухаються по прямій з постійною швидкістю, в присутності зовнішніх полів електрон рухається за законами Ньютона. При цьому враховується тільки вплив зовнішніх полів і нехтується полями, які створюються іншими електронами і іонами.

2. Зіткнення – миттєві події, що змінюють швидкість електронів. На відміну від молекул газу, які стикаються одна з одною, основну роль в «електронному газі» відіграють не зіткнення електронів один з одним, а зіткнення електронів з іонами решітки, що приводить до встановлення теплової рівноваги між решіткою і електронним газом. Зіткненнями електронів один з одним нехтують. Між зіткненнями з іонами електрони проходять шлях, який дорівнює довжині вільного пробігу λ .

У кінетичній теорії газів середня теплова швидкість частинок масою m визначається формулою

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

за $T \cong 300$ К для електрона отримаємо, $\langle v \rangle \cong 10^5$ м/с.

При включенні поля на хаотичний накладається впорядкований рух із середньою швидкістю $\langle u \rangle$. Її можна оцінити, задавши густину струму

$$j = ne\langle u \rangle.$$

Для оцінки середнього значення швидкості упорядкованого руху електрона $\langle u \rangle$ візьмемо густину струму $j = 10^7$ А/м² = 10 А/мм², що трохи вище, ніж у побутовій мережі, концентрація електронів $n = 10^{29}$ м⁻³,

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/с},$$

отже, швидкість упорядкованого руху електронів багато менша за швидкість їхнього теплового (хаотичного) руху, $|\vec{v} + \vec{u}| \approx |\vec{v}|$.

Зміна кінетичної енергії, яка викликається полем, обумовлена зміною середнього значення квадрата повної швидкості:

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle \vec{v}\vec{u} \rangle + \langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

Тоді:

$$\langle \Delta E_k \rangle = \frac{m\langle u^2 \rangle}{2}.$$

Отримаємо розглянуті вище закони з використанням моделі Друде.

Закон Ома. Друде вважав, що при зіткненні з іоном електрон повністю передає йому свою енергію, тобто $v_k = 0$. Нехай поле, в якому рухаються електрони, є однорідним, тоді прискорення електрона, відповідно до другого закону Ньютона, є $w = \frac{eE}{m}$, а максимальна швидкість, яку буде мати електрон перед зіткненням

$$u_{max} = \frac{eE}{m} \tau,$$

де τ – середній час між зіткненнями, час релаксації.

Друде не враховував розподіл електронів за швидкостями, вважаючи що $v = const$, у цьому випадку для часу релаксації отримаємо:

$$\tau = \lambda/v.$$

Тоді до кінця пробігу електрон набуде швидкість:

$$u_{max} = \frac{eE\lambda}{mv},$$

u змінюється лінійно, отже:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Підставляючи знайдене значення для середньої швидкості упорядкованого руху електрона у вираз для густини струму, матимемо:

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Порівнюючи із законом Ома, отримаємо вираз для провідності:

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}.$$

Якщо б електрони не стикалися з іонами решітки, то λ і, отже, провідність були б нескінченно великі, а опір обертався би у нуль. Отже, згідно з класичною теорією, електроопір металів обумовлений зіткненнями вільних електронів з іонами решітки.

Закон Джоуля–Ленца. До кінця пробігу електрон набуває додаткову енергію

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{m u_{max}^2}{2} = \frac{e^2 \lambda^2}{2m v^2} E^2,$$

яку він передає решітці. Ця енергія йде на збільшення внутрішньої енергії металу, тобто метал нагрівається.

Кожен електрон зазнає в одиницю часу $1/\tau$ зіткнень $\frac{1}{\tau} = \frac{v}{\lambda}$, тоді за одиницю часу в одиниці об'єму повинна виділятися кількість теплоти:

$$Q_{\text{пит}} = n \frac{1}{\tau} \Delta\varepsilon_k = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2.$$

Тоді, з урахуванням виразу для провідності, отриманого вище, $Q_{\text{пит}} = \sigma E^2$ – це закон Джоуля–Ленца у диференціальній формі.

Таким чином, класична теорія змогла пояснити закони Ома і Джоуля–Ленца. Однак вона зустрілася з дуже суттєвими труднощами, основними з яких є дві.

1. З виразу для $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\nu}{ne^2\lambda}$ випливає, що опір металів має зростати як корінь з температури, оскільки n та λ не залежать від температури, а $\nu \sim \sqrt{T}$, тоді як експеримент дає $\rho \sim T$.

2. Електронний газ повинен мати молярну теплоємність $(3/2)R$, додавши це до теплоємності решітки $3R$, отримаємо $(9/2)R$, тобто молярна теплоємність металів повинна бути у 1,5 раза більше, ніж у діелектриків, що суперечить експерименту.

Вирішення усіх цих протиріч можна отримати тільки на основі квантової механіки, побудувавши квантову теорію металів.

V. МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§ 24. Взаємодія струмів

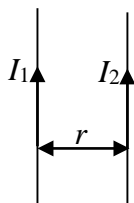


Рис. 5.1.

Нерухомі заряди взаємодіють між собою з силою, яка визначається законом Кулона. Заряди, що рухаються впорядковано, як зазначено вище, створюють у провіднику струм. З досліду відомо, що електричні струми взаємодіють між собою. Наприклад, два прямолінійні паралельні провідники, розташовані на відстані r , по

яким течуть струми I_1 та I_2 , притягують один одного при однаковому напрямку струмів і відштовхуються, якщо струми протилежні (рис. 5.1). Сила взаємодії, яка припадає на одиницю довжини кожного з провідників, є:

$$F_{од} = f = k \frac{2I_1 I_2}{r}.$$

Коефіцієнт пропорційності $2k$. Цей закон був встановлений А. М. Ампером у 1820 р.

Одиниця сили струму – ампер – сила незмінного струму, який, проходячи по двох паралельних провідниках нескінченної довжини і дуже малого перерізу, розташованих на відстані 1 м у вакуумі, викликає силу взаємодії $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини.

У раціоналізованій системі

$$F_{од} = f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r},$$

μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м (генрі на метр). Про одиницю вимірювання йтиметься нижче.

Між ϵ_0 , μ_0 і електродинамічною сталою (швидкістю світла у вакуумі) c існує зв'язок ($\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м):

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

§ 25. Магнітне поле

Як взаємодія нерухомих зарядів здійснюється через електричне поле, взаємодія струмів здійснюється через поле, що називається магнітним. Назва пояснюється тим, що поле, яке збуджується струмом, діє на магнітну стрілку.

У досліді Ерстеда, поставленому у 1920 р., під прямолінійним провідником, по якому пропускався струм, розміщувалася магнітна стрілка (рис. 5.2). Струм спричиняв орієнтуючу дію на стрілку. Стрілка змінювала

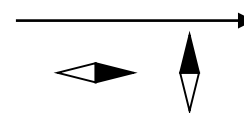


Рис. 5.2.

напрямок при зміні напрямку струму, звідки випливає, що магнітне поле має напрямлений характер і має характеризуватися векторною величиною. Її позначають \vec{B} . Цю величину називають індукцією магнітного поля або магнітною індукцією, одиниця вимірювання – тесла. Назву напруженість магнітного поля носить величина H , аналогічна індукції D електричного поля.

Для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції: поле системи струмів дорівнює геометричній сумі індукції полів, створюваних кожним струмом окремо у даній точці простору:

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i.$$

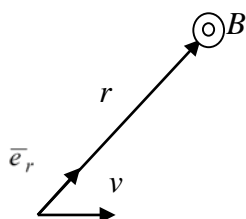


Рис. 5.3.

Із викладеного вище зрозуміло, що магнітне поле породжується рухомих зарядом (рис. 5.3). Цей рух порушує ізотропність простору (з'являється виділений напрям швидкості заряду \vec{v}). При $v \ll c$ (нерелятивістський випадок) поле рухомого заряду

визначається формулою

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{e}_r]}{r^2}. \quad (A)$$

З визначення видно, що \vec{B} – псевдовектор або аксіальний вектор.

§ 26. Закон Біо–Савара–Лапласа

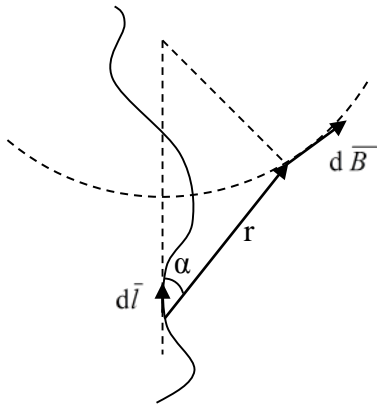


Рис. 5.4.

Знайдемо поле довільного тонкого дроту, по якому тече струм. Розглянемо малий елемент довжини дроту $d\vec{l}$, в ньому міститься $nSdl$ носіїв. У точці, яка визначається радіус-вектором \vec{r} , окремий носій e створює магнітне поле з індукцією (рис. 5.4)

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 e [(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3},$$

де \vec{v} – швидкість хаотичного руху носіїв заряду.

Як завжди, усереднимо, з урахуванням того, що $\langle \vec{v} \rangle = 0$:

$$\langle \vec{B}' \rangle = \frac{\mu_0 e [(\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle) \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 e [\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Помноживши на число носіїв, отримаємо внесок у поле елемента $d\vec{l}$ провідника зі струмом

$$d\vec{B} = \langle \vec{B}' \rangle nSdl = \frac{\mu_0 S [(ne\langle \vec{u} \rangle) \cdot \vec{r}] dl}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 S [\vec{j} \cdot \vec{r}] dl}{4\pi r^3},$$

оскільки напрямки \vec{j} та $d\vec{l}$ збігаються, можна написати $\vec{j}dl = j d\vec{l}$, тоді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 S j [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (\text{B})$$

Ми вивели вираз (B) із (A). Історично було навпаки: вираз (B) було отримано експериментально раніше, ніж (A), а вираз (A) було виведено з (B).

Ж.-Б. Біо і Ф. Савар у 1820 р. провели експериментальне дослідження магнітних полів, П.-С. Лаплас провів теоретичний аналіз результатів, використовуючи принцип суперпозиції, і отримав вираз (В), тому це співвідношення називається законом Біо–Савара–Лапласа.

Застосуємо цю формулу до обчислення поля прямолінійного провідника зі струмом (\vec{B} спрямовано за креслення). З геометричних міркувань (див. рис. 5.5) легко отримати співвідношення:

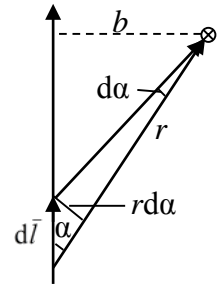


Рис. 5.5.

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Підставляючи все у закон Біо–Савара–Лапласа, отримаємо;

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b \cdot d\alpha \cdot r \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \sin \alpha d\alpha.$$

Враховуючи, що $0 \leq \alpha \leq \pi$, остаточно знайдемо:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

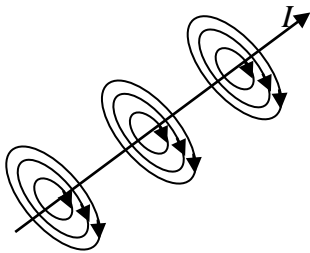


Рис. 5.6.

Лінії індукції магнітного поля B – система концентричних кіл, що охоплюють провідник зі струмом (рис. 5.6). Крім того, як буде показано далі,

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ – таке поле називається вихровим або

соленоїдальним. Тут $\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ – ротор індукції магнітного поля: векторний добуток оператора Гамільтона на вектор індукції магнітного поля.

§ 27. Сила Лоренца

На заряд, який рухається у магнітному полі, діє сила, яку називають магнітною. Вона визначається величинами заряду q , швидкості його руху \vec{v} та індукцією магнітного поля \vec{B} , в якому рухається заряд. Ця сила залежить від взаємної орієнтації векторів \vec{v} і \vec{B} . Експериментально встановлено, що в системі СІ сила має вигляд:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}], \text{ або } F = qvB \sin \alpha.$$

Тут B вимірюється в тесла.

Заряд, що рухається уздовж ліній магнітного поля, не піддається дії цієї сили. Ця сила, оскільки вона напрямлена перпендикулярно до v , не виконує над зарядом роботи. Якщо є і електричне поле E , то повна сила, яка називається силою Лоренца, записується у вигляді:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

§ 28. Закон Ампера

Якщо провідник, по якому тече струм, знаходиться у магнітному полі, на кожен з носіїв заряду діє сила

$$\vec{F}' = e[(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{B}].$$

Від носія заряду дія цієї сили передається провіднику, внаслідок чого на провідник зі струмом у магнітному полі діє сила. Знайдемо силу $d\vec{F}$, яка діє на елемент провідника $d\vec{l}$.

Усереднимо силу F' , що діє на окремий носій, і врахуємо, що $\langle \vec{v} \rangle = 0$:

$$\langle \vec{F}' \rangle = e[(\langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle) \cdot \vec{B}] = e[\langle \vec{u} \rangle \cdot \vec{B}].$$

Число носіїв в елементі провідника $d\vec{l}$ є $nSdl$, сила, що діє на елемент провідника dl , має вигляд:

$$d\vec{F} = \langle \vec{F}' \rangle nSdl = [(ne\langle \vec{u} \rangle) \cdot \vec{B}]Sdl = [\vec{j} \cdot \vec{B}]dV,$$

для об'ємної густини сили отримаємо:

$$\vec{f} = [\vec{j} \cdot \vec{B}].$$

Можна записати інакше $\vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l}$. Тоді $d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$ – сила, що діє на елемент струму $d\vec{l}$ у магнітному полі. Це співвідношення виражає закон Ампера.

Використовуючи закон Ампера, можна знайти силу взаємодії між двома нескінченно довгими паралельними провідниками (рис. 5.7).

Індукція магнітного поля, що створюється першим струмом у точках, де знаходиться другий провідник, є:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{b}.$$

Використовуючи закон Ампера, легко отримати силу, яка діє на одиницю довжини другого провідника з боку поля, створеного першим провідником зі струмом:

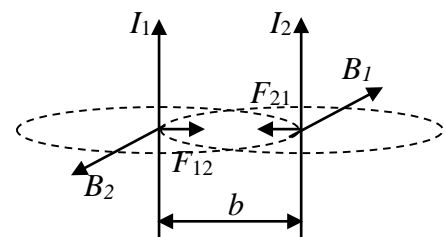


Рис. 5.7.

$$F_{21\text{од}} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}.$$

Аналогічно для сили, що діє на перший провідник зі струмом з боку поля, створеного другим провідником.

За однакових напрямків струмів провідники притягуються, за різних – відштовхуються (див. рис. 5.7).

§ 29. Контур зі струмом в магнітному полі

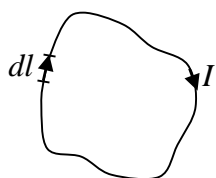


Рис. 5.8.

Розглянемо поведінку контура зі струмом у магнітному полі (рис. 5.8). Нехай поле однорідне $\vec{B} = \text{const}$. На елемент контуру $d\vec{l}$, за законом Ампера, діє сила:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

Проінтегрувавши по усій довжині контура, отримаємо:

$$\vec{F} = \oint I[d\vec{l} \cdot \vec{B}] = I[(\oint d\vec{l}) \cdot \vec{B}] = 0,$$

оскільки $\oint d\vec{l} = 0$.

Тобто результуюча сила, що діє на контур зі струмом в однорідному магнітному полі, дорівнює нулю.

Справедливо для контура будь-якої форми, розташованого довільно відносно поля. Надалі будемо розглядати тільки плоскі контури. Обчислимо результуючий обертальний момент, що створюється силами, прикладеними до контуру.

$$\vec{N} = \int [\vec{r} \cdot d\vec{F}].$$

Нехай нормаль до контуру орієнтована перпендикулярно до індукції магнітного поля B . Розіб'ємо площу контура на вузькі смужки (див. рис. 5.9). На елемент контура $d\vec{l}_1$ діє сила $d\vec{F}_1$ (рис. 5.10):

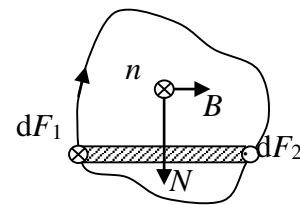


Рис. 5.9.

$$dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1 = IBdy,$$

аналогічно на елемент dl_2 :

$$dF_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2 = IBdy.$$

Ці сили утворюють пару, момент якої

$$dN = IBx dy = IBdS.$$

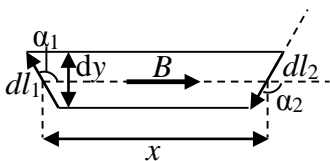


Рис. 5.10.

Тут dS – площа виділеної смужки (рис. 5.10). Момент сили $d\vec{N}$ перпендикулярний до векторів нормалі \vec{n} й індукції магнітного поля \vec{B} .

$$d\vec{N} = I[\vec{n} \cdot \vec{B}]dS.$$

Проінтегрувавши по усій площі контура, знайдемо момент сил, що діють на контур зі струмом з боку магнітного поля:

$$\vec{N} = \int I[\vec{n} \cdot \vec{B}]dS = I[\vec{n} \cdot \vec{B}]S = [(IS\vec{n}) \cdot \vec{B}].$$

Величина $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ називається дипольним магнітним моментом.

Тоді

$$\vec{N} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}].$$

У разі, коли вектор індукції магнітного поля паралельний до вектора нормалі до контура $\vec{n} \parallel \vec{B}$, момент $\vec{N} = 0$ і сили прагнуть або стиснути, коли нормаль та індукція магнітного поля антипаралельні ($\vec{n} \downarrow \vec{B}$), або розтягнути, коли ці вектори паралельні ($\vec{n} \uparrow \vec{B}$), контур.

Якщо плоский контур знаходиться у неоднорідному магнітному полі, сила має вигляд:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha,$$

α – кут між дипольним моментом \vec{p}_m та індукцією магнітного поля \vec{B} .

Якщо дипольний магнітний момент паралельний до індукції магнітного поля $\vec{p}_m \uparrow \vec{B}$, сила втягує контур в область сильнішого поля. Якщо ці вектори антипаралельні $\vec{p}_m \downarrow \vec{B}$, контур виштовхується з поля.

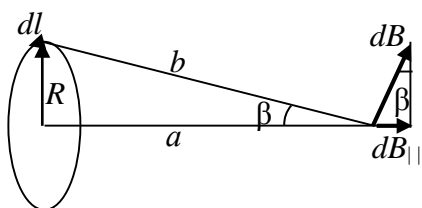


Рис. 5.11.

Для довідок приведемо розрахунок магнітного поля кругового струму (рис. 5.11). Спочатку розрахуємо поле в його центрі. Розіб'ємо струм на нескінченно малі елементи dl і запишемо поле, створене таким елементом

у центрі кільця зі струмом, скориставшись законом Біо–Савара–Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Проінтегрувавши по всій довжині кільця, отримаємо:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(\pi R^2)}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3},$$

поле у центрі кругового струму.

Знайдемо поле у довільній точці, що лежить на осі кільця. Поле на осі кільця спрямовано вздовж осі, оскільки поперечні складові взаємно компенсуються (рис. 5.11). Тоді:

$$dB_{||} = dB \sin \beta = dB \frac{R}{b} = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi b^2 b},$$

оскільки кут між dl і b дорівнює 90° , $\sin \alpha = 1$, b – відстань від виділеного елемента до точки спостереження.

Виконуючи інтегрування, отримаємо:

$$B = \int dB_{||} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi b^3} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Тут a – відстань від центру кільця до точки спостереження.

§ 30. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі

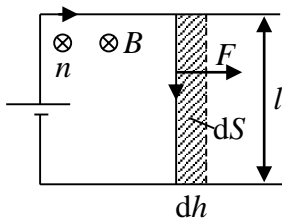


Рис. 5.12.

Розглянемо контур зі струмом, утворений нерухомими провідниками і рухомою перемичкою довжини l . Нехай цей контур знаходиться в однорідному зовнішньому магнітному полі, перпендикулярному до площини контура і напрямленим, як показано на рисунку, за креслення. Тоді сила, що діє на перемичку, буде спрямована праворуч (рис. 5.12):

$$F = IBl.$$

При переміщенні перемички на dh ця сила виконує роботу

$$dA = Fdh = IBldh = IBdS.$$

З'ясуємо, як змінюється при переміщенні перемички потік магнітної індукції Φ через площу контура. Як позитивну нормаль \vec{n} до контура домовилися брати нормаль, що утворює зі струмом правоюгвинтову систему:

$$d\Phi = \vec{B}\vec{n}dS,$$

або

$$\Phi = \int \vec{B}\vec{n}dS.$$

Для розглянутого випадку орієнтації векторів нормалі й індукції магнітного поля $\Phi = BS$ ($d\Phi = BdS$).

Тоді робота

$$dA = Id\Phi,$$

$d\Phi$ – це потік через площу dS , яку описує перемичка в процесі її руху.

У випадку зворотного напрямку поля сила змінює напрямок, $dS < 0$, і магнітна сила виконує від'ємну роботу:

$$dA = -IBldh = -IBdS.$$

У векторній формі

$$dA = I\vec{B}\vec{n}dS.$$

У випадку постійного струму $I = const$, після інтегрування отримаємо:

$$A = \int Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

тобто робота, що виконується магнітними силами над контуром, дорівнює добутку сили струму на приріст магнітного потоку, що пронизує контур.

§ 31. Теорема Гауса для магнітного поля. Закон повного струму

Потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню, як показано вище, дорівнює:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = N_{вих} - N_{вх},$$

тут $N_{вих}$ і $N_{вх}$ – число силових ліній електричного поля, що виходять з гаусової поверхні і входять у неї.

Аналогічне співвідношення можна записати для потоку вектора індукції магнітного поля:

$$\Phi_B = N_{вих} - N_{вх}.$$

Причому лінії вектора \vec{B} будуються так само, як і лінії вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

Відсутність у природі магнітних зарядів призводить до того, що лінії індукції магнітного поля \vec{B} замкнені. Отже:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Це теорема Гауса для вектора індукції магнітного поля в інтегральній формі: потік вектора індукції магнітного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

Скориставшись теоремою Остроградського–Гауса, можемо записати:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = \int \operatorname{div} \vec{B} dV = 0,$$

що має бути справедливо для будь-якого об'єму, вибраного довільно, тоді:

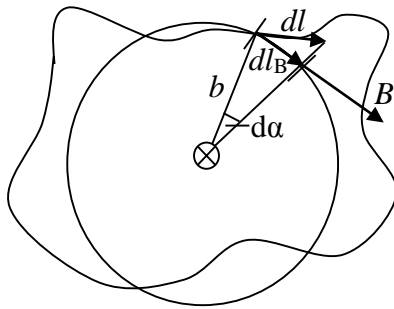
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

на відміну від електричного поля, де $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Це теорема Гауса для індукції магнітного поля \vec{B} у диференціальній формі.

Розглянемо циркуляцію вектора \vec{B} вздовж довільного контура:

$$\oint \vec{B} d\vec{l}.$$



Розгляд проведемо на прикладі прямого провідника зі струмом і врахуємо, що вектор індукції магнітного поля напрямлений по дотичній до кола, проведеного через точку спостереження з центром у центрі провідника (рис. 5.13).

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl_B,$$

Рис. 5.13.

тут $dl_B = b d\alpha$ – проєкція елемента контура $d\vec{l}$ на напрям вектора індукції магнітного поля, індукція магнітного поля, яке створюється прямим провідником зі струмом $B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b}$, підставляючи ці вирази у попереднє співвідношення, отримаємо:

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl_B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b} b d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha,$$

тоді:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\alpha = \mu_0 I,$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I,$$

де I – струм, який охоплюється контуром.

Отриманий результат справедливий для струму, який тече по провіднику довільної форми. Нехай контур охоплює кілька провідників зі струмом (рис. 5.14).

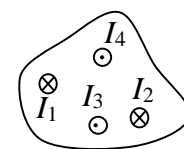


Рис. 5.14.

У силу принципу суперпозиції, сумарне поле дорівнює сумі полів, які створюються кожним зі струмів:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint (\sum_k \vec{B}_k) d\vec{l} = \sum_k \oint \vec{B}_k d\vec{l},$$

причому:

$$\oint \vec{B}_k d\vec{l} = \mu_0 I_k.$$

Тоді:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k.$$

Причому струми – величини алгебраїчні. Це співвідношення називається законом повного струму.

Запишемо струм через густину струму:

$$\sum I_k = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S \vec{j} \vec{n} dS.$$

Тоді:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

Скориставшись теоремою Стокса:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S [\vec{\nabla} \cdot \vec{B}] d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S}.$$

Циркуляція вектора вздовж довільного контура дорівнює інтегралу від ротора цього вектора по поверхні, натягнутій на контур. Підставляючи цей вираз у попередню формулу, отримаємо:

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

або, в силу довільності вибраного контура:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Отримане співвідношення справедливе для поля у вакуумі за відсутності змінних у часі електричних полів.

Магнітне поле можна характеризувати векторним потенціалом

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A},$$

оскільки $\text{div} \vec{B} = 0$, а $\text{div} \text{rot} \vec{A} \equiv 0$.

Якщо контур не охоплює струмів, то $\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$.

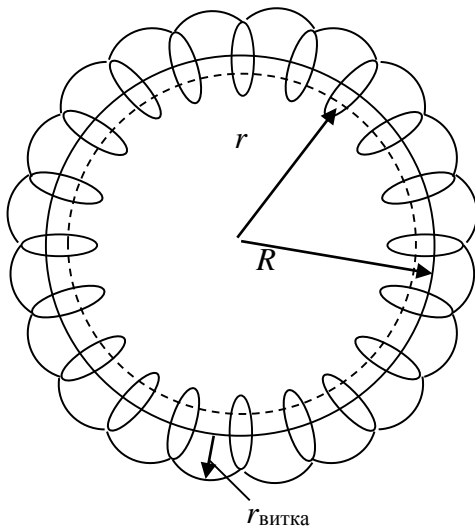


Рис. 5.15.

Як приклад розглянемо поле тороїда – це провідник, навитий на тор (рис. 5.15). R – радіус тора, $r_{\text{витка}}$ – радіус витка провідника, r – радіус контура. У силу симетрії вектор \vec{B} напрямлений по дотичній до контура:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi r,$$

$$I_{\text{пол}} = 2\pi R n I,$$

де n – число витків на одиницю довжини, I – струм, який тече по витку. Тоді:

$$B 2\pi r = \mu_0 2\pi R n I,$$

або

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r},$$

де nI – число ампер-витків на метр.

Для контура поза тороїдом $I = 0$ та $B = 0$, тобто поле тороїда зосереджене всередині тороїда. За $R \gg r_{\text{витка}}$, $R \cong r$ та $B = \mu_0 nI$, а це поле соленоїда. Для такого тороїда можна говорити про однорідність поля.

§ 32. Поле всередині провідника зі струмом

Нехай по циліндричному провіднику радіуса R тече струм I . Знайдемо поле на відстані r від осі провідника (рис. 5.16). У силу симетрії задачі контур виберемо у формі кола, за $r < R$, враховуючи, що

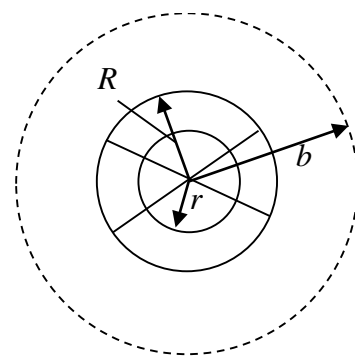


Рис. 5.16.

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2},$$

матимемо:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 \int j dS = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Звідки

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^2 r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2},$$

$$B = \frac{\mu_0 2Ir}{4\pi R^2}.$$

Поза провідником $b > R$:

$$B 2\pi b = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 2I}{4\pi b},$$

як було показано раніше.

VI. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ

§ 33. Явище електромагнітної індукції

У 1831 р. М. Фарадей виявив, що в замкненому провідному контурі при зміні потоку магнітної індукції через поверхню цього контура, виникає електричний струм. Явище називається явищем електромагнітної індукції, а струм, що виникає в контурі – індукційним. Отже, при зміні потоку магнітної індукції, що пронизує контур, в контурі виникає електрорушійна сила, яка називається електрорушійною силою індукції, її позначають ε_i . Вона не залежить від способу зміни потоку магнітної індукції Φ і визначається лише швидкістю зміни магнітного потоку $\frac{d\Phi}{dt}$. Знак ε_i визначається знаком $\frac{d\Phi}{dt}$.

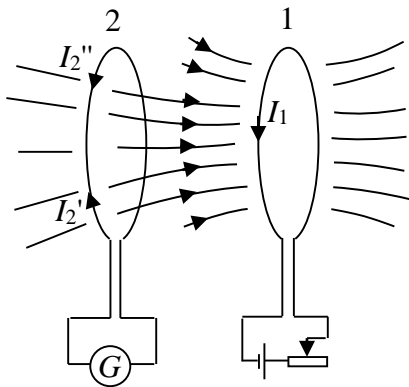


Рис. 6.1.

Е. Х. Ленц встановив правило, що дає змогу визначити напрям індукційного струму: індукційний струм завжди напрямлений так, щоб протидіяти причині, що його викликає. При збільшенні струму I_1 виникає струм I_2' , при зменшенні I_1 виникає I_2'' (рис. 6.1). Зауважимо, що правило Ленца є застосуванням загального

термодинамічного принципу Ле Шательє до електродинамічних процесів.

§ 34. Е.Р.С. індукції

Знову розглянемо контур з рухомою перемичкою, поміщений у магнітне поле. Будемо переміщати перемичку зі швидкістю v . Напрямки усіх векторів показані на рис. 6.2. На кожен електрон буде діяти сила, напрямлена уздовж перемички:

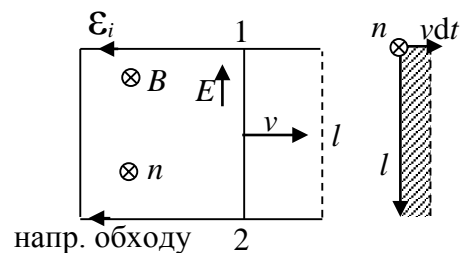


Рис. 6.2.

$$\vec{F}_{||} = -e[\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

Ця сила еквівалентна силі, що діє з боку електричного поля, напруженість якого є

$$\vec{E} = [\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

Це поле неелектростатичного походження. Його циркуляція вздовж контура дає величину е.р.с., що індукується у контурі.

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint [\vec{v} \cdot \vec{B}] d\vec{l} = \int_{(1)}^{(2)} [\vec{v} \cdot \vec{B}] d\vec{l},$$

оскільки $\vec{v} \neq 0$ тільки на ділянці 1–2.

Будемо вважати $\varepsilon_i > 0$, якщо її напрямок утворює з напрямком нормалі правоюгвинтову систему.

$$\varepsilon_i = [\vec{v} \cdot \vec{B}] \int_{(1)}^{(2)} d\vec{l} = [\vec{v} \cdot \vec{B}] \vec{l} = \frac{\vec{B}[\vec{l} \cdot \vec{v} dt]}{dt} = -\frac{\vec{B} \vec{n} dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

тут ми скористалися правилом перестановки векторів у змішаному добутку.

Отже:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Одиниця потоку магнітної індукції Φ – вебер – це потік через поверхню в 1 м^2 , яка перетинається нормальними лініями магнітного поля з індукцією,

яка дорівнює 1 тесла. За $\frac{d\Phi}{dt} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{с}}$, $\varepsilon_i = 1 \text{ В}$.

Якщо контур складається не з одного, а з N витків, то ε_i дорівнюватиме сумі е.р.с., індукованих в кожному контурі, оскільки витки з'єднані послідовно.

$$\varepsilon_i = - \sum \frac{d\Phi_k}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum \Phi_k,$$

тут Φ_k – магнітний потік через k -тий контур. Величина

$$\Psi = \sum \Phi_k$$

називається повним магнітним потоком через складний контур або потокозчепленням.

§ 35. Явище самоіндукції

Електричний струм, який тече у будь-якому контурі, створює пронизуючий цей контур повний магнітний потік Ψ . При зміні I змінюється і Ψ , і як наслідок, в контурі індукується е.р.с. Це явище називається самоіндукцією.

Відповідно до закону Біо–Савара–Лапласа магнітна індукція B пропорційна силі струму, який викликав поле. Звідси випливає, що струм I в контурі і створюваний ним повний магнітний потік Ψ через контур пропорційні один одному:

$$\Psi = LI,$$

введена тут величина L називається індуктивністю контура.

Лінійна залежність Ψ від I спостерігається тільки в тому випадку, якщо магнітна проникність середовища μ , яке оточує контур, не залежить від напруженості поля H , що відображає відсутність матеріалів, які називаються феромагнетиками.

При незмінній силі струму повний потік може змінюватися за рахунок зміни форми і розмірів контура.

Отже, індуктивність L залежить від геометрії контура і магнітних властивостей навколишнього середовища. Жорсткий контур у немагнітному середовищі має постійну індуктивність L .

За одиницю індуктивності в СІ приймається індуктивність такого провідника, у якого при силі струму в 1 А виникає зчеплений з ним потік Ψ , що дорівнює 1 Вб. Цю одиницю називають генрі.

Як приклад розглянемо індуктивність соленоїда. (Нагадаємо, що соленоїдом називається котушка циліндричної форми довжиною l і діаметром d , рис. 6.3).

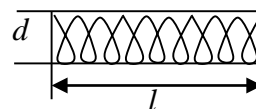


Рис. 6.3.

Візьмемо соленоїд, у якого $l \gg d$. Нехай по ньому тече струм I , тоді всередині соленоїда збуджується, як показано вище, однорідне поле.

$$B = \mu_0 n I,$$

де n – число витків на одиницю довжини.

Потік через кожний виток

$$\Phi = BS.$$

Тоді

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu_0 n^2 l l S = \mu_0 n^2 l V,$$

де l – довжина, S – площа поперечного перерізу соленоїда.

Порівнюючи, отримуємо:

$$L = \mu_0 n^2 l S = \mu_0 n^2 V,$$

при цьому μ_0 має розмірність – індуктивність / довжина.

При зміні сили струму в контурі виникає е.р.с. самоіндукції

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right).$$

При $L = const$

$$\varepsilon_S = -L \frac{dI}{dt}.$$

Знак мінус обумовлений, як і раніше, правилом Ленца, тобто індукційний струм спрямований так, щоб перешкоджати причині, яка його породила. Якщо $L \neq const$, тоді $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dI} \frac{dI}{dt}$, і для \mathcal{E}_S матимемо

$$\varepsilon_S = - \left(L + I \frac{dL}{dI} \right) \frac{dI}{dt},$$

тобто за наявності феромагнетика коефіцієнт пропорційності не дорівнює L .

У масивних провідниках, що рухаються в неоднорідному магнітному полі або знаходяться у змінному магнітному полі, внаслідок явища електромагнітної індукції виникають індукційні струми, які називаються струмами Фуко. Оскільки опір масивних провідників малий, струми Фуко можуть досягати значних величин. Струми Фуко можуть відігравати як позитивну, так і негативну роль.

Для отримання матеріалів високої чистоти використовують плавлення в так званих індукційних печах, в яких створюється змінне електромагнітне поле високої частоти. Кількість теплоти, що виділяється при цьому, достатня для того, щоб розплавити поміщений у піч метал. Відповідно до правила Ленца, вихрові струми напрямлені так, що призводять до гальмування провідника, який рухається у магнітному полі. Гальмування металу у магнітному полі використовують для демпфірування рухомих частин приладів.

У трансформаторах, приладах для перетворення напруги змінного струму струми Фуко можуть призводити до значного нагрівання їхніх осердь і, отже, до втрат енергії. Щоб запобігти цим втратам, осердя набирають з тонких пластин, між якими поміщають ізолюючі прошарки. Осердя набирають так, щоб струми Фуко були напрямлені перпендикулярно до пластин.

§ 36. Взаємна індукція

Якщо два контури близько розташовані один до одного, то струм, який тече в першому контурі, створює магнітний потік через другий (рис. 6.4):

$$\Psi_2 = L_{21}I_1.$$

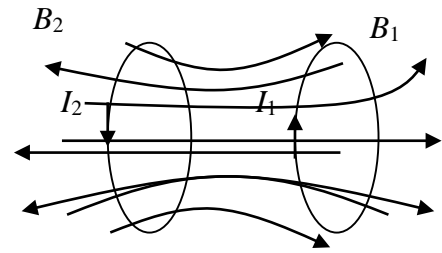


Рис. 6.4.

Тоді у другому контурі, при зміні струму I_1 в першому контурі, виникає індукційна е.р.с.

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогічно навпаки:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= L_{12}I_2, \\ \varepsilon_{i1} &= -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \end{aligned}$$

Контури 1 і 2 називаються індуктивно зв'язаними, а явище виникнення е.р.с. в одному з контурів при зміні сили струму в іншому називається взаємною індукцією. L_{21} і L_{12} називаються взаємною індуктивністю контурів.

За відсутності феромагнетиків:

$$L_{21} = L_{12}.$$

Їхня величина залежить від форми, розмірів, взаємного розташування контурів і магнітної проникності середовища. Одиниця вимірювання – генрі.

§ 37. Струм при замиканні і розмиканні кола

Додаткові струми, що виникають внаслідок самоіндукції, відповідно до правила Ленца, завжди перешкоджають змінам струму, які їх викликали. При включенні в коло джерел струму струми самоіндукції напрямлені протилежно струму, який створюється джерелом. При виключенні струму вони мають той самий напрямок, що і спадний струм джерела. Тому індуктивність кола

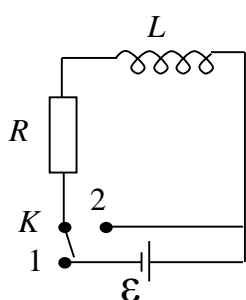


Рис. 6.5.

проявляється в уповільненні процесів зникнення і встановлення струму. Розглянемо ці процеси більш докладно.

Знайдемо спочатку закон зменшення струму при розмиканні кола (рис. 6.5). При положенні ключа K у точці 1 в колі тече струм:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R},$$

цей струм стаціонарний.

Відключимо джерело, одночасно перевівши ключ в положення 2 . Струм почне спадати, але одночасно виникне е.р.с. самоіндукції, що перешкоджає його зменшенню:

$$\varepsilon_S = IR = -L \frac{dI}{dt},$$

відповідно до другого правила Кірхгофа. Останнє співвідношення можна переписати у вигляді:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt \quad \text{або} \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t.$$

Звідки:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Отже, струм у колі зменшується по експоненті (рис. 6.6):

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ – стала часу кола – це час,

протягом якого початкове значення сили струму I_0 зменшується в e разів.

Швидкість спадання струму залежить від параметрів кола. Чим більше L і менше R , тим повільніше спадає струм, $I \rightarrow 0$ за $t \rightarrow \infty$. Цим пояснюється проскакування іскри у момент відключення. Коло розмикається, енергія виділяється у вигляді випромінювання.

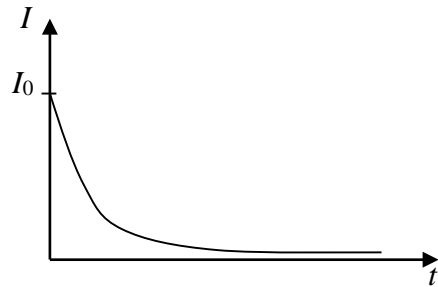


Рис. 6.6.

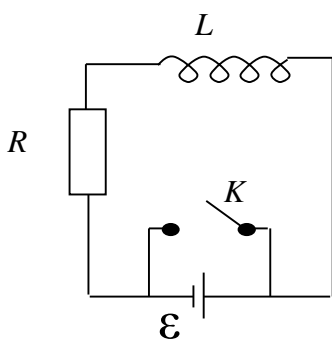


Рис. 6.7.

Розглянемо випадок замикання кола (рис. 6.7). Тепер з наростанням струму, поряд із зовнішньою е.р.с. \mathcal{E} , буде діяти і е.р.с. самоіндукції \mathcal{E}_S . Причому відповідно до правила Ленца, \mathcal{E}_S діє проти \mathcal{E} . Знову застосуємо II правило Кірхгофа:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_S = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}.$$

Перетворивши, отримаємо рівняння

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L},$$

це лінійне, неоднорідне диференціальне рівняння I порядку. Можливі кілька варіантів розв'язання цього рівняння.

Введемо нову змінну

$$U = RI - \mathcal{E}, \quad \frac{dU}{dt} = R \frac{dI}{dt} \text{ або } \frac{dI}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dU}{dt}.$$

Виконуючи зазначену заміну у вихідному рівнянні

$$IR - \varepsilon = -L \frac{dI}{dt}, \quad U = -\frac{L}{R} \frac{dU}{dt},$$

і розділяючи змінні, знайдемо:

$$\frac{dU}{U} = -\frac{R}{L} dt.$$

Інтегруючи з урахуванням початкових умов, за $t_0 = 0$, $I = 0$, $U = -\varepsilon$, отримаємо:

$$\int_{-\varepsilon}^{U(t)} \frac{dU}{U} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt,$$

$$\ln \left| \frac{U(t)}{-\varepsilon} \right| = -\frac{R}{L} t,$$

звідки $U(t) = -\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$.

Повертаючись до попередньої змінної, матимемо:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L}t},$$

або в остаточному вигляді

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

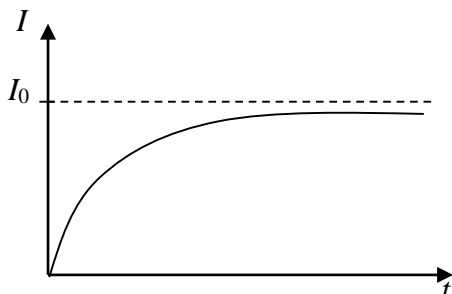


Рис. 6.8.

Отже, швидкість встановлення струму визначається тією ж сталою часу, що і його зменшення. Процес встановлення струму також має асимптотичний характер (рис. 6.8).

VII. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ

§ 38. Намагнічування магнетиків і напруженість магнітного поля

Досі ми розглядали магнітне поле, що створюється струмами у вакуумі. Якщо провідники знаходяться в якому-небудь середовищі, магнітне поле змінюється. Це пояснюється тим, що будь-яка речовина є магнетиком, тобто здатна під дією магнітного поля набувати магнітний момент – намагнічуватися. (Тут ситуація в деякому сенсі аналогічна поляризації діелектрика у зовнішньому електричному полі). Намагнічена речовина створює поле \vec{B}' , яке накладається на зовнішнє поле \vec{B}_0 . Обидва поля в сумі дають результуюче поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Ідея пояснення явища намагнічування речовин належить А. Амперу, який припустив, що в молекулах речовини циркулюють кругові (молекулярні) струми. Кожен такий струм створює магнітне поле. За відсутності зовнішнього поля магнітні моменти ($\vec{p}_m = IS\vec{n}$), що створюються молекулярними струмами, орієнтовані у довільний спосіб, і результуюче поле дорівнює нулю. Під дією магнітного поля магнітні моменти молекул набувають переважну орієнтацію в напрямку магнітного поля, магнетик намагнічується, магнітні поля окремих молекулярних струмів вже не компенсують одне одного, і виникає результуюче поле \vec{B}' .

Намагнічення магнетика характеризують магнітним моментом одиниці об'єму. Ця величина називається намагніченістю (аналог поляризованості діелектрика)

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_m}{\Delta V}.$$

Для характеристики магнітного поля вводять додаткову величину \vec{H} – напруженість магнітного поля, яка пов'язана з індукцією \vec{B} співвідношенням:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

намагніченість пропорційна напруженості магнітного поля

$$\vec{M} = \chi \vec{H}.$$

χ – характерна для даного магнетика величина, яка називається магнітною сприйнятливістю. Величина безрозмірна. Характеризує магнітні властивості речовини. На відміну від діелектричної сприйнятливості, яка завжди позитивна, може бути як позитивною, так і негативною. Для неферомагнітних речовин у не дуже сильних магнітних полях χ не залежить від напруженості магнітного поля. Комбінуючи два останні співвідношення, отримаємо:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}.$$

Тут $\mu = 1 + \chi$ – магнітна проникність середовища, може бути як більшою, так і меншою за 1.

Зі співвідношення $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$ випливає, що в ізотропних середовищах \vec{H} є вектор, який має той самий напрямок, що і вектор \vec{B} , але в $\mu_0\mu$ разів менший за модулем. Зі співвідношення $H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{b}$ випливає, що одиниця напруженості магнітного поля – ампер, поділений на метр.

§ 39. Види магнетиків

Введена вище величина магнітної сприйнятливості χ визначає магнітну сприйнятливість одиниці об'єму речовини. Прийнято замість цієї величини користуватися сприйнятливістю, віднесеною до кіломоля або кілоатома.

$$\chi_{\kappa\mu} = \chi V_{\kappa\mu}.$$

Розмірність цієї величини $[\chi_{\kappa\mu}] = \text{м}^3/\text{кмоль}$.

Залежно від величини і знака магнітної сприйнятливості χ усі магнетики поділяються на три групи:

- 1) діамагнетики, $\chi_{\kappa\mu} < 0$, $|\chi_{\kappa\mu}| \sim 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кмоль}$;
- 2) парамагнетики, $\chi_{\kappa\mu} > 0$, $\chi_{\kappa\mu} \sim 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ м}^3/\text{кмоль}$;
- 3) феромагнетики, $\chi_{\kappa\mu} > 0$, $\chi_{\kappa\mu} \sim 10^3 \text{ м}^3/\text{кмоль}$.

Причому у феромагнетиків магнітна сприйнятливість χ , а отже, і магнітна проникність μ залежать від напруженості магнітного поля. Повна намагніченість магнетика, як зазначено вище, визначається співвідношенням

$$M = \chi H,$$

звідки ясно, що для діамагнетиків намагніченість спрямована проти зовнішнього магнітного поля $M \uparrow \downarrow H$, для пара- і феромагнетиків ці два вектори паралельні $M \downarrow \downarrow H$. Після намагнічування феромагнетики можуть мати намагніченість і під час відсутності зовнішнього магнітного поля. Цю властивість феромагнетиків використовують для виготовлення постійних магнітів.

§ 40. Гістерезис

До феромагнетиків належать залізо, нікель, гадоліній, кобальт та інші елементи, сполуки і сплави. Намагніченість феромагнетиків у 10^{10} разів перевищує намагніченість пара- і діамагнетиків.

Крива намагнічування заліза, залежність індукції магнітного поля в речовині від напруженості зовнішнього поля вперше була отримана і вивчена О. Г. Столетовим (рис. 7.1). Для заліза (й інших феромагнетиків) характерна наявність гістерезису.

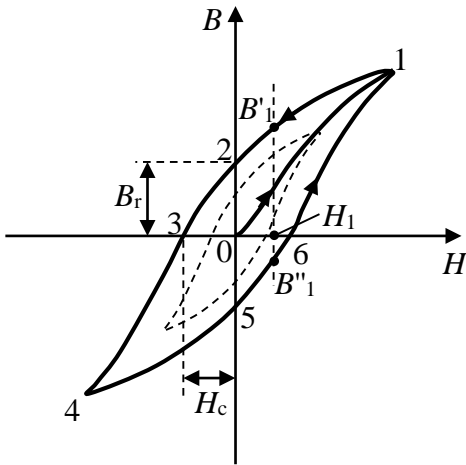


Рис. 7.1.

Під дією змінного магнітного поля індукція змінюється за кривою 0–1–2–3–4–5–6–1–2–..., яка називається петлею гістерезису (рис. 7.1). Величина, що визначається точкою перетину петлі гістерезису з віссю індукції магнітного поля B_r – залишкова індукція, тобто індукція магнітного поля феромагнетика, коли напруженість зовнішнього магнітного поля

перетворюється у нуль, при цьому M_r – залишкова намагніченість. На цій властивості феромагнетиків засноване виготовлення постійних магнітів. Величина напруженості зовнішнього магнітного поля, в якому індукція феромагнетика перетворюється у нуль H_c , називається коерцитивною силою. Ефект гістерезису полягає в тому, що значення індукції магнітного поля у магнетика в зростаючому полі B_1'' і в спадаючому – B_1' , різні за одного й того самого значення напруженості зовнішнього поля H_1 (рис. 7.1).

Основи теорії феромагнетизму були створені Я. Френкелем і В. Гейзенбергом у 1928 р.

Розглянемо криву залежності намагніченості феромагнетика від напруженості зовнішнього магнітного поля (рис. 7.2). Спочатку, при збільшенні напруженості зовнішнього магнітного поля, намагніченість матеріалу збільшується, магнітні моменти молекул орієнтуються вздовж поля. При досягненні деякого значення напруженості зовнішнього магнітного поля усі магнітні моменти молекул шикуються вздовж поля, намагніченість досягає насичення $\vec{M} = const$. Враховуючи, що

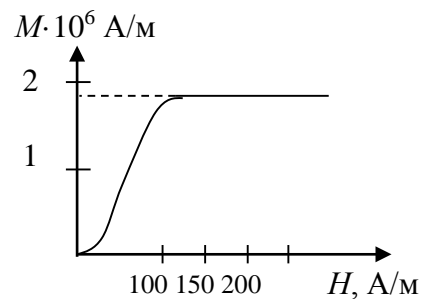


Рис. 7.2.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}),$$

при насиченні $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + const$, тобто індукція магнітного поля ферромагнетика зростає за лінійним законом зі зростанням напруженості зовнішнього магнітного поля.

На рис. 7.1 суцільною лінією позначена повна петля гістерезису, вона відповідає значенню напруженості зовнішнього магнітного поля, коли намагніченість досягає насичення, точка 1. Пунктирною лінією, всередині повної петлі гістерезису, зображена часткова петля гістерезису, вона спостерігається, коли напруженість зовнішнього магнітного поля менша за напруженість поля, яке відповідає насиченню намагніченості.

У ферромагнетиках існують області спонтанного намагнічення – домени.

За певної температури, яка називається точкою Кюрі T_c , області спонтанного намагнічення розпадаються, матеріал втрачає ферромагнітні властивості. Температури Кюрі для заліза і нікелю відповідно дорівнюють $\vec{\epsilon} T_c^{Fe} = 768^\circ C, T_c^{Ni} = 365^\circ C$.

За температур вищих температури Кюрі $T > T_c$, ферромагнетик перетворюється на парамагнетик, його магнітна сприйнятливість змінюється за законом Кюрі–Вейса:

$$\chi_{km} = \frac{C}{T - T_c}.$$

§ 41. Енергія магнітного поля

Розглянемо електричне коло, що містить індуктивність L , активний опір R та джерело е.р.с. ϵ (рис. 7.3). При замкненому ключі у соленоїді встановиться магнітне поле з індукцією B . Якщо відключити джерело е.р.с. ϵ і замкнути коло на активний опір, то через нього протягом деякого часу буде текти

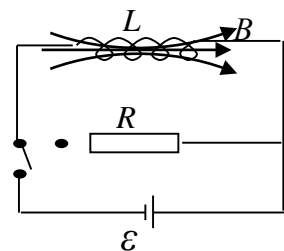


Рис. 7.3.

струм, що підтримується е.р.с. самоіндукції ε_s , що виникає у соленоїді. Робота, що здійснюється струмом, як показано вище, є

$$dA = \varepsilon_s I dt = -\frac{d\Phi}{dt} I dt = -I d\Phi.$$

При постійній індуктивності $L = \text{const}$ ($d\Phi = L dI$) для роботи можна написати: $dA = -L I dI$. Проінтегрувавши останнє співвідношення, знайдемо (струм спадає від I до 0):

$$A = -\int_I^0 L I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

За відсутності механічних рухів і хімічних реакцій ця робота йде на приріст внутрішньої енергії опору, соленоїда і з'єднувальних дротів, тобто на їхнє нагрівання. У процесі виконання роботи зникає магнітне поле. Оскільки ніяких інших змін в навколишньому просторі не відбувається, то єдиний висновок, який варто зробити, полягає в тому, що магнітне поле є носієм енергії, яка перетворюється у внутрішню енергію елементів розглянутого кола. Отже, провідник з індуктивністю L , по якому тече струм I , має енергію

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

яка локалізована у збудженому струмом магнітному полі. (Нагадаємо, що енергія електричного поля, локалізованого у конденсаторі, дорівнює

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2}{2 d^2} S d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V).$$

Цей вираз можна трактувати й інакше, як роботу, яку потрібно виконати проти е.р.с. самоіндукції у процесі наростання струму від 0 до I . Виконана робота йде на створення магнітного поля, яке має енергією

$$A' = \int_0^I (-\varepsilon_S) L dt = \int_0^I L I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Виразимо цю енергію через величини, що характеризують саме поле. Поле в середовищі є $B = \mu_0 \mu H$, μ – магнітна проникність середовища. Індуктивність соленоїда, як показано вище, дорівнює

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Напруженість магнітного поля, створюваного струмом, який тече у соленоїді

$$H = nI,$$

звідки

$$I = \frac{H}{n},$$

підставляючи L та I у попереднє співвідношення для енергії, отримаємо:

$$W = \frac{\mu_0 \mu n^2 I^2}{2} V = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

або, ввівши об'ємну густину енергії, знайдемо:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Цьому виразу можна надати іншу форму, скориставшись співвідношенням, яке пов'язує індукцію і напруженість магнітного поля:

$$w = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Отриманий вираз аналогічний виразу для густини енергії електричного поля.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ ТА ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛІВ V–VII

Елемент об'єму dV , по якому тече електричний струм, що характеризується вектором густини струму \vec{j} , створює у точці, яка визначається радіус-вектором \vec{r} , проведеним з цього елемента, магнітне поле з індукцією $d\vec{B}$, яка дорівнює, за законом Біо–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \cdot \vec{r}]}{r^3} dV, \quad (7.1)$$

$r = |\vec{r}|$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала. Для струму I , який тече по тонкому провіднику, цей закон має вигляд:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (7.2)$$

Тут $d\vec{l}$ – нескінченно малий вектор, напрямлений по дотичній до провідника. Співнаправлений з ним вектор $I d\vec{l}$ називається елементом струму.

Для магнітного поля справедливий принцип суперпозиції:

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{B}_k, \quad (7.3)$$

де \vec{B}_k – індукція, створена у даній точці k -м елементом, \vec{B} – вектор індукції магнітного поля, створеного усіма елементами. Зокрема, індукція, створена ділянкою тонкого провідника, по якому тече струм між точками 1 і 2, знаходиться інтегруванням вздовж цієї ділянки:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{(1)}^{(2)} \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (7.3a)$$

Для нескінченного прямолінійного провідника інтегрування дає:

$$B_{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}, \quad (7.4)$$

де a – відстань від даної точки поля до провідника. Напрямок вектора індукції в цьому випадку пов'язаний з напрямком струму так само, як пов'язані між собою напрямки обертання і поступального руху гвинта з правою нарізкою (правило правого гвинта). Для точки, яка лежить на відстані a від кінця напівнескінченного провідника у перпендикулярній до нього площині:

$$B_{\Pi/\infty} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}. \quad (7.5)$$

Величина індукції магнітного поля, що створюється в центрі кругового струму радіуса R :

$$B_{кр} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (7.6)$$

Цей вектор спрямований вздовж осі кругового струму перпендикулярно його площині так, щоб з його кінця було видно, що струм у контурі тече проти напрямку обертання годинникової стрілки.

Циркуляція вектора магнітної індукції (у вакуумі) вздовж будь-якого замкненого контура L дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що течуть всередині контура, помноженої на магнітну сталу:

$$\oint_L (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{k=1}^{k=n} I_k. \quad (7.7)$$

Струм I_k вважається позитивним, якщо з кінця відповідного вектора густини струму \vec{j}_k видно, що обхід контура L відбувається проти годинникової стрілки.

На елемент струму $I d\vec{l}$ у магнітному полі з індукцією \vec{B} діє сила Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (7.8)$$

Силу, що діє на ділянку провідника зі струмом 1–2, розраховують інтегруванням цього виразу:

$$\vec{F}_{1,2} = I \int_{(1)}^{(2)} [d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \quad (7.9)$$

У разі замкненого контура зі струмом в однорідному полі ($\vec{B} = \text{const}$) сумарна сила $\vec{F} = 0$. Сумарний момент сил Ампера:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]. \quad (7.10)$$

Тут \vec{p}_m – вектор магнітного моменту контура:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \quad (7.11)$$

де \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S , обмеженої контуром. Вектор \vec{p}_m напрямлений так, щоб з його кінця було видно, що струм у контурі тече проти напрямку обертання годинникової стрілки.

Обертальний момент \vec{N} (7.10) прагне привести контур у положення стійкої рівноваги, за якої вектори \vec{p}_m і \vec{B} паралельні.

Магнітним потоком через поверхню S із зовнішньою нормаллю \vec{n} називають інтеграл від вектора індукції магнітного поля:

$$\Phi = \iint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}), \quad (7.12)$$

тут $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$.

При зміні магнітного потоку в контурі, який обмежує цю поверхню, виникає е.р.с. індукції. Згідно із законом Фарадея, вона дорівнює:

$$\varepsilon_{\text{інд}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.13)$$

Знак «мінус» відповідає правилу Ленца: індукційний струм завжди спрямований так, щоб протидіяти причині, що його викликає.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайти магнітну індукцію, що створюється ділянкою прямолінійного провідника зі струмом I у точці, віддаленій від нього на відстань a . Напрямок на цю точку з кінців ділянки 1 і 2 задається кутами α_1 і α_2 відповідно.

Розв'язання

З точки M , у якій потрібно знайти магнітну індукцію (рис.7.4), опустимо перпендикуляр MO на пряму, яка містить ділянку провідника 1–2 (довжина перпендикуляра дорівнює a). З прямою сполучимо вісь y так, щоб струм протікав у її додатному напрямку. Тоді початок довільного вектора елемента струму $I d\vec{l}$ має координату y , а його довжина дорівнює $|I d\vec{l}| = I dy$. Цей елемент струму створює у точці M магнітну індукцію, яка визначається формулою (7.2), її абсолютна величина дорівнює:

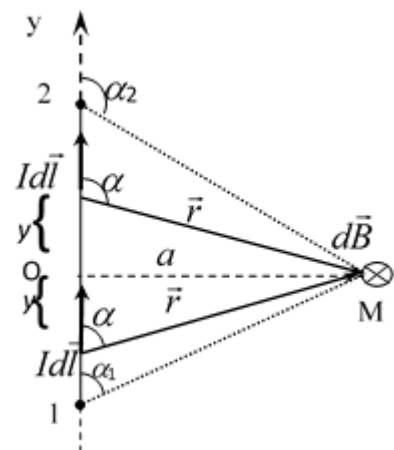


Рис. 7.4.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dy \cdot r \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot dy}{r^2}. \quad (1)$$

Для будь-якого елемента струму вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний до площини рисунку і напрямлений за креслення, тому для знаходження модуля результуючого поля B достатньо додати усі dB .

Із рисунку видно, що за $y > 0$

$$y = a \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha), \quad (2)$$

а за $y < 0$

$$y = -a \cdot \operatorname{ctg}\alpha. \quad (3)$$

Останні дві рівності еквівалентні, отже, для будь-якого y :

$$dy = d(-a \cdot \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (4)$$

Підставляючи цей вираз у формулу (1) і враховуючи, що $r \sin \alpha = a$, отримаємо:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha. \quad (5)$$

Інтегрування у границях від α_1 до α_2 дає для магнітної індукції поля, що створюється прямолінійною ділянкою провідника зі струмом, вираз:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (6)$$

Звідси як окремі випадки отримуються формули (7.5) для напівнескінченного струму ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \pi$) і (7.4) для нескінченного ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$).

Задача 2. Струм I тече по тонкому провіднику, який має вигляд правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса R . Знайти магнітну індукцію у центрі цього контура. Дослідити отриманий вираз, якщо $n \rightarrow \infty$.

Розв'язання

$\frac{\begin{matrix} I \\ R \\ n \\ \hline B - ? \end{matrix}}$	Вектор B магнітної індукції у центрі O кола, описаного біля правильного n -кутника (рис. 7.5), дорівнює сумі однакових векторів B_1 , породжених однаковими ділянками 1–2 – сторонами n -кутника:
--	---

$$B = n \cdot B_1. \quad (1)$$

Величину B_1 знайдемо, скориставшись результатом задачі 1 (формула 6). З рисунку видно, що ділянка 1–2 є основою рівнобедреного трикутника з бічними сторонами R і кутом при вершині $2\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Отже, відстань від ділянки зі струмом до точки O , у якій розраховується магнітна індукція, дорівнює:

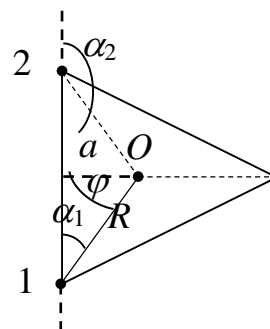


Рис. 7.5.

$$a = R \cos \varphi = R \cos \frac{\pi}{n}. \quad (2)$$

Напрямок на точку O задається кутами:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \quad (3)$$

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}. \quad (4)$$

Підставляючи вирази (2), (3), (4) у формулу (6) задачі 1, отримуємо:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R \cos \frac{\pi}{n}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (5)$$

Поле, створене усіма сторонами n -кутника, згідно з (1), дорівнює:

$$B = n \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (6)$$

Для дослідження випадку $n \rightarrow \infty$ перепишемо цей вираз у вигляді:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}, \quad (7)$$

границею якого за $n \rightarrow \infty$ є:

$$B_{кр} = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (8)$$

Цей вираз збігається з результатом (4.6) для кругового струму (границею n -кутника за $n \rightarrow \infty$ є коло).

Задача 3. Знайти магнітну індукцію у точці O , якщо провідник зі струмом I має вигляд, показаний на рис. 7.6. Радіус зігнутої частини провідника R , прямолінійні ділянки дуже довгі.

Розв'язання

Провідник складається з п'яти ділянок різного типу, номери яких показані на рисунку. Ділянки 2 і 4 містять елементи $d\vec{l}$, утворюють з радіус-вектором, проведеним в точку O , кути, які дорівнюють або 0 , або π . Згідно з законом Біо–Савара–Лапласа (7.2), у таких випадках

$$\frac{I}{R} \left| \begin{array}{l} \\ \\ B - ? \end{array} \right.$$

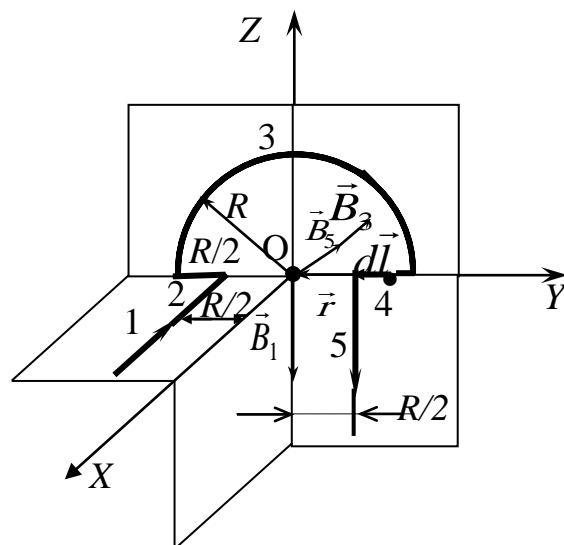


Рис. 7.6.

$d\vec{B} = 0$, тобто у магнітну індукцію ділянки 2 і 4 внеску не дають. Розглянемо ділянки 1, 3 і 5.

Ділянка 1 є напівнескінченим прямим струмом. У точці O , тобто на відстані $R/2$, створена ним індукція, згідно з (7.5), дорівнює:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (1)$$

Цей вектор напрямлений проти осі OZ . Аналогічно, ділянка 5 створює вектор індукції такий самий за величиною:

$$B_5 = B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (2)$$

але напрямлений інакше – проти осі OX .

Ділянка 3 є половиною кругового струму. Створена ним магнітна індукція, відповідно до (7.6), дорівнює:

$$B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}, \quad (3)$$

а напрямлена проти осі OX .

Для результуючого вектора індукції у точці O за принципом суперпозиції (7.3) отримаємо:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 + \vec{B}_5. \quad (4)$$

Враховуючи, що вектори \vec{B}_3 і \vec{B}_5 напрямлені однаково, а \vec{B}_1 до них перпендикулярний, для модуля результуючого вектора отримаємо:

$$B = \sqrt{B_1^2 + (B_3 + B_5)^2}. \quad (5)$$

Підставляючи у (5) вирази (1), (2), (3), після перетворень отримаємо:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} \sqrt{2 + \pi + \frac{\pi^2}{4}}. \quad (6)$$

Задача 4. Визначити індукцію магнітного поля, що створюється струмом, рівномірно розподіленим по площині з лінійною густиною \vec{i} .

Розв'язання

Щоб знайти магнітну індукцію у довільній точці M (рис. 7.7.) на деякій відстані a від площини зі струмом P_1 , опустимо з M на P_1 перпендикуляр MN_0 . Через його основу – точку N_0 – проведемо пряму α , перпендикулярну до вектора лінійної густини струму \vec{i} , через цю

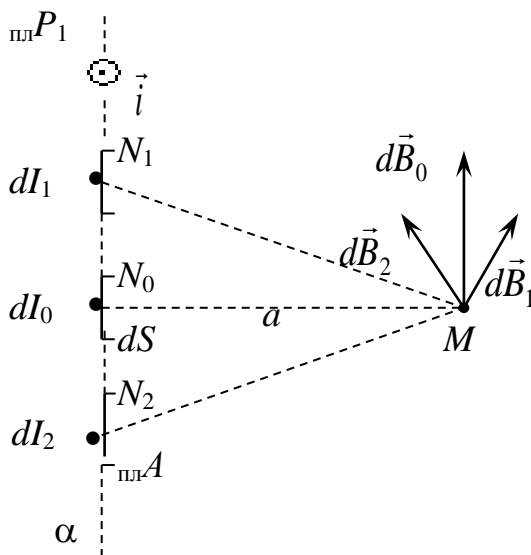


Рис. 7.7.

пряму і точку M побудуємо площину A , перпендикулярну до площини P_1 (рис. 7.7 побудовано на площині A).

В околі точки N_0 виділимо нескінченну смужку ширини dS , що йде уздовж вектора \vec{i} – нескінченний прямий струм величини $dI_0 = idS$. Цей струм породжує магнітну індукцію $d\vec{B}_0$,

напрявлену (згідно з правилом правого гвинта) перпендикулярно до відрізка MN_0 , тобто паралельно до прямої α . Вибравши симетрично до точки N_0 точки N_1 і N_2 і виділивши нескінченно малі прямі струми $dI_1 = dI_2 = dI_0 = idS$, побудуємо для них вектори $d\vec{B}_1$ і $d\vec{B}_2$, які збігаються за величиною і розташовані симетрично щодо вектора $d\vec{B}_0$. Їхня векторна сума напрямлена уздовж $d\vec{B}_0$. Уся площина складається з аналогічних смужок (нескінченних прямих струмів dI_k , $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$), і індукція її магнітного поля може бути,

згідно з принципом суперпозиції, отримана як сума магнітних індукцій $d\vec{B}_k$ цих струмів:

$$\vec{B} = \sum_{k=0}^{\infty} d\vec{B}_k. \quad (1)$$

Результуючий вектор \vec{B} напрямлений паралельно до прямої α .

Очевидно, його величина не змінюється при зміщенні точки M вздовж площини P_1 , а може залежати тільки від відстані a . Це дає змогу не застосовувати безпосередньо закон Біо–Савара–Лапласа і принцип суперпозиції (що досить громіздко), а використати теорему про циркуляцію вектора магнітної індукції (7.7).

На рис. 7.8 вказаний прямокутний контур $CDEF$ зі стороною $DE = h$. У деяких точках контура побудовані вектори магнітної індукції \vec{B} і елемента контура $d\vec{l}$. Очевидно, що циркуляція \vec{B} за відрізками CD і EF дорівнює нулю (тут $\vec{B} \perp d\vec{l}$), а за відрізками DE і FC – дорівнює:

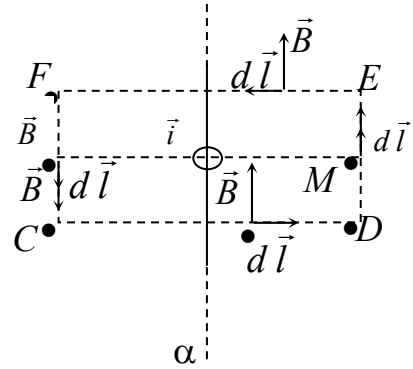


Рис. 7.8.

$$\Gamma_{DE} = \Gamma_{FC} = B \cdot h. \quad (2)$$

Струм, охоплений контуром, дорівнює

$$I = i \cdot h, \quad (3)$$

За теоремою про циркуляцію запишемо:

$$\oint_{CDEF} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I, \quad (4)$$

або:

$$2 \cdot B \cdot h = \mu_0 i h, \quad (5)$$

звідки остаточно для поля усїєї площини:

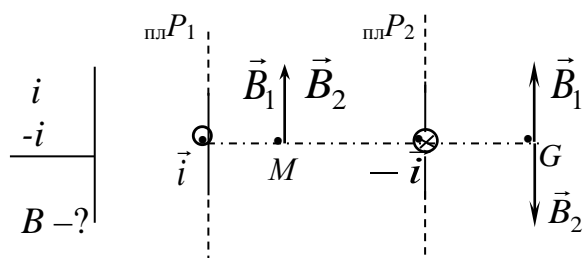
$$B = \frac{\mu_0 i}{2}. \quad (6)$$

Як видно, величина індукції магнітного поля не залежить від відстані до площини. Нагадаємо, електричне поле рівномірно зарядженої нескінченної площини також не залежить від відстані до площини.

Задача 5. Визначити індукцію магнітного поля, яке створюється струмами, рівномірно розподіленими по двом паралельним площинам з лінійними густинами \vec{i} і $-\vec{i}$.

Розв'язання

На рис. 7.9 зображені площини P_1 і P_2 , по яким струми з однаковою за величиною лінійною густиною i течуть у протилежних напрямках. У точці M ,



розташованій між площинами, вектори індукції \vec{B}_1 (від площини P_1) і \vec{B}_2 (від площини P_2) напрямлені однаково. Їхня сума дорівнює:

Рис. 7.9.

$$B = 2B_1 = 2 \cdot \frac{\mu_0 i}{2} = \mu_0 i. \quad (7)$$

У точці G поза площинами через протилежну орієнтацію \vec{B}_1 і \vec{B}_2 їхня сума дорівнює нулю:

$$\vec{B} = 0. \quad (8)$$

Аналогічний результат виходить при розрахунку індукції електростатичного поля, створеного двома паралельними нескінченними площинами, зарядженими різнойменними зарядами з поверхневими густинами $+\sigma$ і $-\sigma$.

Вектори індукції електростатичного поля, створені кожною площиною, у просторі між ними однаково напрямлені, і поля взаємно посилюються: $D = 2D_1 = 2 \cdot \frac{\sigma}{2} = \sigma$. Поза площинами поля взаємно компенсуються.

Задача 6. Два довгі прями взаємно перпендикулярні провідники розташовані один від одного на відстані a . В кожному провіднику тече струм I . Знайти максимальне значення сили Ампера на одиницю довжини провідника у цій системі.

Розв'язання

Запропонована конфігурація зображена на рис. 7.10: провідник 2 лежить у площині рисунка, провідник 1 перпендикулярний до неї і перетинається з цією площиною у точці N . Відрізок NP перпендикулярний до провідника 2 і за умовою задачі довжина його дорівнює a . Із довільної точки M , взятої на другому провіднику (її положення визначається кутом $\angle MNP = \alpha$), побудуємо елемент струму $Id\vec{l}$. На нього у полі, створеному першим провідником, діє сила Ампера $d\vec{F}$:

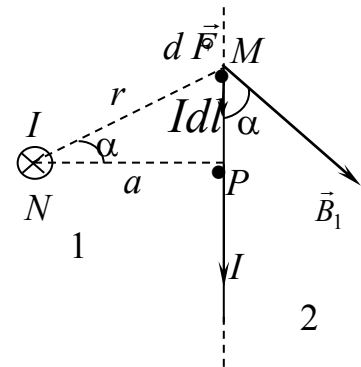


Рис. 7.10.

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}_1]. \quad (1)$$

Тут \vec{B}_1 – вектор магнітної індукції поля першого провідника, напрямлений перпендикулярно до вектора \vec{r} і рівний:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2)$$

Модуль сили:

$$dF = |d\vec{F}| = IB_1 dl \sin \alpha = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} \sin \alpha \cdot dl. \quad (3)$$

На одиницю довжини припадає сила:

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha}{2\pi r}. \quad (4)$$

у трикутнику MNP :

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad (5)$$

що після підстановки у вираз (4) дає:

$$f = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \sin 2\alpha. \quad (6)$$

Ця величина максимальна за $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тоді $\sin 2\alpha = 1$, і дорівнює:

$$f_{max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}. \quad (7)$$

Якщо напрямок струму в одному з провідників змінити на протилежний, то кут між векторами $I d\vec{l}$ і \vec{B}_1 виявиться рівним $\pi - \alpha$. Це спричинить зміну напрямку сили Ампера $d\vec{F}$, але не вплине на її величину: формула (7) залишиться справедливою. Зміна напрямку струмів в обох провідниках не змінює ні величини, ні напрямку сили.

Задача 7. Заряд q рівномірно розподілений по об'єму однорідної непровідної кулі радіуса R , яка обертається навколо осі, що проходить через її центр, з кутовою швидкістю ω . Знайти магнітний момент кулі.

Розв'язання

$$\left. \begin{array}{l} q \\ R \\ \omega \\ p_m - ? \end{array} \right|$$

Сферично симетрично заряджену кулю можна представити у вигляді набору кілець. Обертаючись, вони механічно переносять заряди по колах, створюючи кругові струми, що течуть у паралельних площинах. Їхні магнітні моменти різні за величиною, але напрямлені однаково – вздовж осі обертання у напрямку, пов'язаному зі струмом правилом правого гвинта. Складаючись, вони дають сумарний магнітний момент усього тіла, напрямлений так само. Сила струму $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, де Δq – заряд, перенесений через переріз за час Δt . В цьому разі $\Delta q = q_k$ – заряд кільця, $\Delta t = T$ – період обертання, за який цей заряд повністю переноситься через перпендикулярний до кільця переріз. Тоді:

$$I = \frac{q_k}{T} = \frac{\omega}{2\pi} q_k. \quad (1)$$

На рис. 7.11 вгорі дано меридіанний переріз кулі. Розглянемо шар, перпендикулярний до осі обертання ou , на відстані y від центру, що має нескінченно малу товщину dy і радіус r . Лінійні величини зручно виразити через кутів:

$$r = R \cos \varphi, \quad (2)$$

$$y = R \sin \varphi, \quad (3)$$

$$dy = R \cos \varphi d\varphi, \quad (4)$$

де φ – широтний кут, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $d\varphi$ – його малий приріст. Цей шар, який має форму диска, можна уявити, як зображено на рис. 7.11 внизу, у вигляді сукупності кілець радіуса x і ширини dx , $0 < x < r$.

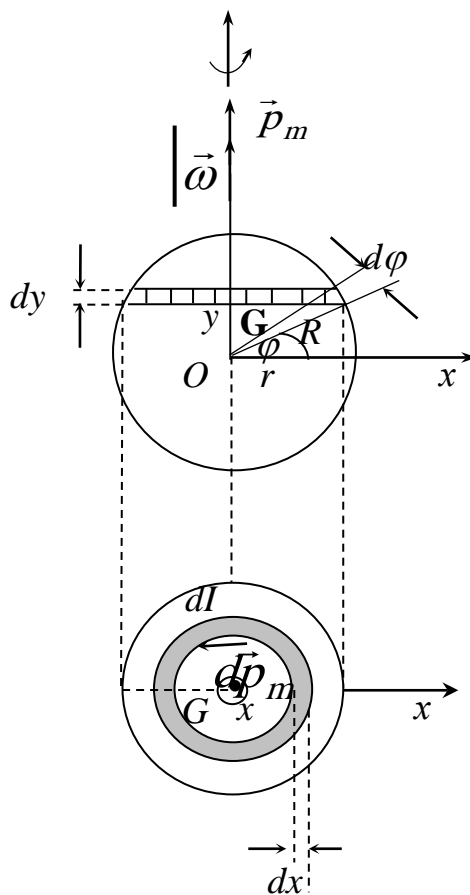


Рис. 7.11.

Об'єм кільця:

$$dV = 2\pi x dx dy, \quad (5)$$

його заряд:

$$dq = \rho \cdot dV. \quad (6)$$

Тут ρ – об'ємна густина заряду кулі, що дорівнює:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (7)$$

Обертаючись, кільце створює струм, величина якого, згідно з (1), дорівнює:

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq. \quad (8)$$

Магнітний момент цього струму дорівнює (7.11):

$$dp_m = S dI = \pi x^2 dI. \quad (9)$$

Враховуючи формули (5)–(9), отримаємо для елементарного внеску, який робить мале кільце у загальний магнітний момент кулі:

$$dp_m = \pi R \rho \omega \cos \varphi x^3 dx d\varphi. \quad (10)$$

Інтегруючи по верхній півкулі і подвоюючи результат (внески верхньої і нижньої півкуль однакові), отримуємо:

$$\begin{aligned} p_m &= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} [\pi R \rho \omega \cos \varphi \int_0^{R \cos \varphi} x^3 dx] d\varphi = \\ &= 2\pi R \rho \omega \int_0^{\pi/2} \frac{(R \cos \varphi)^4}{4} \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{15} \pi R^5 \rho \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи p за формулою (7), остаточно отримуємо:

$$p_m = \frac{q\omega R^2}{5}. \quad (12)$$

Задача 8. Укріплену на кінці коромисла терезів невелику котушку K з числом витків $N = 200$ помістили у зазор між полюсами магніту, як показано на рисунку. Площа перерізу котушки $s = 1 \text{ см}^2$, довжина плеча OA коромисла $l = 30 \text{ см}$. За відсутності струму через котушку терези врівноважені. Після того, як через котушку пустили струм $I = 22 \text{ мА}$, для відновлення рівноваги довелося змінити вантаж на чаші терезів на $\Delta m = 60 \text{ мг}$. Знайти індукцію магнітного поля в місці знаходження котушки.

Розв'язання

На верхній частині рис. 7.12 зображена схема установки, головна частина якої – важіль з нерухомою точкою O ; на нижньому – розподіл сил і моментів сил. Вісь Oz обертання важеля

$$\begin{aligned} N &= 200 \\ s &= 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2 \\ l &= 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м} \\ I &= 22 \text{ мА} = 0,022 \text{ А} \\ \Delta m &= 60 \text{ мг} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \end{aligned}$$

$B - ?$

спрямуємо за креслення. За відсутності струму виконується умова рівноваги: сума проєкцій на вісь Oz моментів сил тяжіння котушки m_1g і чаші із вантажем m_2g дорівнює нулю:

$$m_2gl - m_1gl_1 = 0. \quad (1)$$

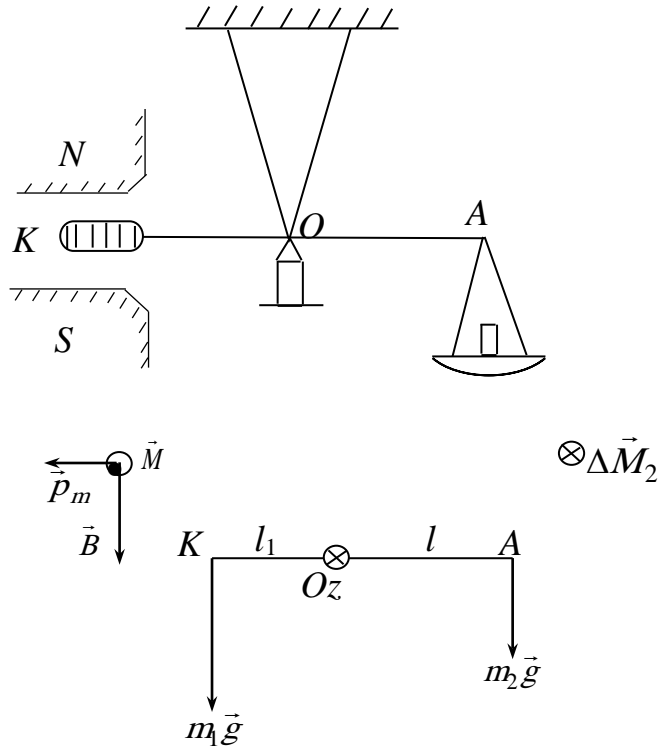


Рис. 7.12

При пропусканні через котушку струму I у неї з'являється магнітний момент, який можна знайти, помноживши магнітний момент одного витка (7.11) на їхню кількість:

$$p_m = NIs. \quad (2)$$

Припустимо, що струм у колі протікає так, що вектор \vec{p}_m спрямований ліворуч вздовж плеча OK . Тоді при заданому напрямку магнітного поля (від північного полюса N до південного S , тобто униз) вектор моменту сил Ампера напрямлений проти осі Oz :

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad M_z = -p_m B. \quad (3)$$

(Через малість котушки поле між полюсами магніту в її границях можна вважати однорідним). Щоб рівновага зберігалася, необхідно забезпечити додатковий момент сил $\Delta \vec{M}_2$, напрямлений вздовж осі Oz , додавши на чашу вантаж масою Δm . Тепер умова рівноваги має вигляд:

$$(m_2 + \Delta m)gl - m_1 gl_1 - p_m B = 0. \quad (4)$$

Віднявши з рівняння (4) рівняння (1), отримаємо:

$$\Delta mgl - p_m B = 0, \quad (5)$$

звідки:

$$B = \frac{\Delta mgl}{p_m}. \quad (6)$$

Підставляючи вираз (2) для p_m , отримаємо остаточно:

$$B = \frac{\Delta mgl}{NIs}. \quad (7)$$

Підставляючи числові дані, отримуємо:

$$B = \frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot 9,8 \cdot 0,3}{200 \cdot 0,022 \cdot 10^{-4}} \approx 0,4 \text{ (Тл)}.$$

Якщо змінити на протилежний напрямок струму в котушці або поміняти місцями полюси магніту, то вектор моменту сил Ампера виявиться спрямованим вздовж осі Oz . В цьому разі рівновага важеля відновлюється зняттям з чаші вантажу маси Δm . Рівняння (4) має вигляд:

$$(m_2 - \Delta m)gl - m_1gl_1 + p_m B = 0, \quad (8)$$

Це не вплине на результат: формула (7) залишиться справедливою.

Задача 9. По Π -подібному провіднику, розташованому у горизонтальній площині, може ковзати без тертя перемичка 1–2, як зображено на рис. 7.13. Перемичка має довжину l , масу m і опір R . Уся система знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B . В момент $t = 0$ на перемичку почали діяти з постійною горизонтальною силою F , і перемичка почала переміщуватися праворуч. Знайти залежність її швидкості від часу. Самоіндукція й опір Π -подібного провідника нехтовно малі.

Розв'язання

l m R B $V(0) = 0$ F	<p>Нехай положення перемички задається координатою x уздовж осі, напрямком якої збігається з напрямком сили \vec{F} (рис. 7.13). Рух перемички праворуч збільшує площу контура, який вона замикає. Разом з цим збільшується магнітний потік через контур. Це викликає появу е.р.с. індукції й індукційного струму, який своїм полем, згідно з правилом Ленца, повинен перешкоджати наростанню магнітного потоку. Отже, струм напрямлений проти годинникової стрілки (тоді його магнітна індукція протилежна зовнішній магнітній індукції \vec{B}, напрямленої за креслення), тобто по перемичці він тече від точки 2 до точки 1. Його величина дорівнює:</p>
---	---

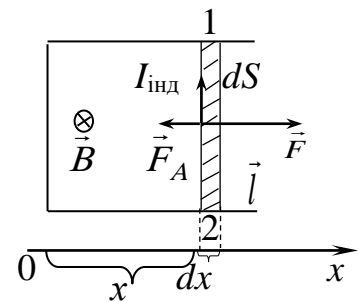


Рис. 7.13.

$$I_{\text{інд}} = \frac{\varepsilon_{\text{інд}}}{R}, \quad (1)$$

де $\varepsilon_{\text{інд}}$ – абсолютне значення е.р.с. індукції, яке знайдемо із закону Фарадея (7.13):

$$\varepsilon_{\text{інд}} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{d(BS)}{dt} \right| = B \frac{dS}{dt} = B \frac{d(lx)}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = BlV. \quad (2)$$

У зовнішньому магнітному полі \vec{B} на перемичку зі струмом $I_{\text{інд}}$ діє сила Ампера:

$$\vec{F}_A = I_{\text{інд}} [\vec{l}, \vec{B}], \quad (3)$$

де вектор \vec{l} спрямований від 1 до 2. При цьому сила Ампера спрямована протилежно зовнішній силі \vec{F} . Проектуючи їх на вісь Ox , запишемо рівняння руху перемички:

$$m \frac{dV}{dt} = F - F_A. \quad (4)$$

Отримаємо вираз для F_A , користуючись співвідношеннями (1)–(3):

$$F_A = BI_{\text{інд}}l = B \frac{\varepsilon_{\text{інд}}}{R} l = \frac{B^2 l^2}{R} V. \quad (5)$$

Ввівши позначення $\beta = \frac{B^2 l^2}{R}$, підставимо вираз для сили Ампера F_A в рівняння (4):

$$m \frac{dV}{dt} = F - \beta V. \quad (6)$$

Розділяючи змінні, отримаємо:

$$\frac{-\beta dV}{F - \beta V} = -\frac{\beta}{m} dt. \quad (7)$$

Інтегрування з урахуванням початкових умов дає:

$$\ln \frac{F - \beta V}{F} = -\frac{\beta}{m} t. \quad (8)$$

Після потенціювання і наступних перетворень залежність швидкості від часу набуде вигляду:

$$V = \frac{F}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}). \quad (9)$$

Після підстановки значення β :

$$V = \frac{FR}{B^2 l^2} (1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}). \quad (10)$$

Зауважимо, що швидкість експоненціально наближується до граничного значення $V_{\text{гранич}} = \frac{FR}{B^2 l^2}$.

Задача 10. Квадратна рамка зі стороною b і довгий прямий провідник зі струмом I знаходяться в одній площині, як показано на рис. 7.14. Рамку поступально переміщують вправо з постійною швидкістю V . Знайти е.р.с. індукції у рамці як функцію відстані x .

Розв'язання

Вектор магнітної індукції \vec{B} поля нескінченно довгого прямого провідника зі струмом перпендикулярний до креслення (рис. 7.14) і спадає за величиною по мірі віддалення від провідника (7.5). Тому магнітний потік зменшується при віддаленні рамки. Як наслідок, у ній виникає е.р.с. індукції, яка визначається законом Фарадея (7.13).

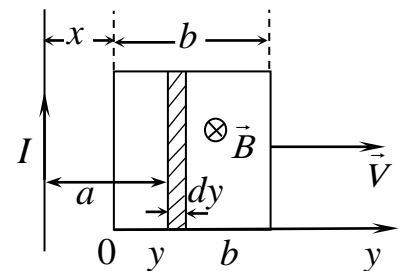


Рис. 7.14.

Для розрахунку потоку спрямуємо вісь Oy перпендикулярно до провідника зі струмом вздовж однієї зі сторін рамки, поєднавши початок координат з ближньою до струму стороною. Тоді через нескінченно тонку смужку на поверхні рамки, взяту у точці з координатою y довжини b і ширини dy (на рисунку вона заштрихована), проходить потік вектора індукції:

$$d\Phi = B(y) \cdot bdy. \quad (1)$$

Тут $B(y)$ – індукція поля струму на відстані $a = x + y$ від нього (7.4):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+y)}. \quad (2)$$

Підставляючи цей вираз в (1) та інтегруючи по усій поверхні рамки, тобто по y від 0 до b , отримуємо:

$$\Phi = \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+y)} bdy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{x}\right). \quad (3)$$

Магнітний потік залежить від x ; значить, для рамки, яка рухається зі швидкістю $V = dx/dt$, він залежить від часу. За законом Фарадея (7.13):

$$\mathcal{E}_{\text{інд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -V \frac{d\Phi}{dx}. \quad (4)$$

Виконавши диференціювання, після перетворень отримуємо:

$$\mathcal{E}_{\text{інд}} = \frac{\mu_0 I V b^2}{2\pi x(x+b)}. \quad (5)$$

Задача 11. По двох мідних гладких шинах, встановлених під кутом α до горизонту, ковзає під дією сили тяжіння мідна перемичка маси m (схема установки подана на рис. 7.15). До кінців шин приєднаний конденсатор ємності C . Відстань між шинами l . Система знаходиться в однорідному

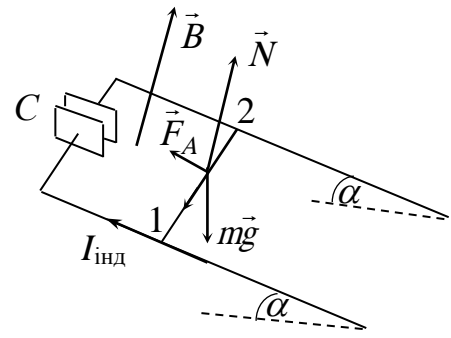


Рис. 7.15.

магнітному полі з індукцією B , перпендикулярному до площини, в якій переміщується перемичка. Опір шин, перемички і ковзаючих контактів, а також самоіндукція контура нехтовно малі. Знайти прискорення перемички w .

Розв'язання

α m C l B <hr style="width: 100%;"/> $w - ?$	<p>Причина появи е.р.с. індукції в даній установці описана для аналогічної ситуації в задачі 8. Її величина дорівнює:</p> $\varepsilon_{i\text{нд}} = Blv, \tag{1}$
--	---

а породжуваний нею індукційний струм $I_{\text{інд}}$ – струм зарядки конденсатора – спрямований від точки 2 до точки 1. Конденсатор як ніби підключений до джерела струму, а оскільки опір у колі дорівнює нулю, напруга на обкладинках дорівнює е.р.с.:

$$U = \varepsilon_{i\text{нд}} = Blv. \tag{2}$$

Тоді позитивний заряд однієї з обкладок:

$$q = CU = CBlv, \tag{3}$$

а індукційний струм:

$$I_{i\text{нд}} = \frac{dq}{dt} = CBl \frac{dv}{dt} = CBlw, \tag{4}$$

тут $w = dv/dt$ – прискорення перемички.

Протікання струму по перемичці в зовнішньому магнітному полі викликає силу Ампера \vec{F}_A , спрямовану перпендикулярно до перемички догори вздовж похилої площини:

$$F_A = BI_{\text{інд}}l. \quad (5)$$

На перемичку діє також сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила реакції опори \vec{N} . За другим законом Ньютона:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_A. \quad (6)$$

Проектуючи це векторне рівняння на вісь x , спрямовану паралельно до шин униз, отримаємо:

$$mw = mg \sin \alpha - F_A. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (5) і (4):

$$mw = mg \sin \alpha - B^2 l^2 Cw. \quad (8)$$

Звідси після перетворень отримуємо для прискорення перемички:

$$w = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{B^2 C l^2}{m}}. \quad (9)$$

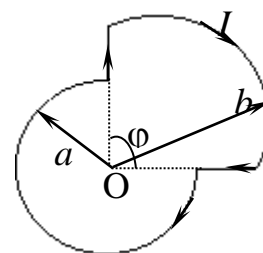
Якщо $B = 0$ або $C = 0$, тобто немає умов для виникнення індукційного струму і пов'язаної з ним сили Ампера, формула (9) дає відомий результат для прискорення тіла, що ковзає без тертя униз по похилій площині:

$$w = g \sin \alpha.$$

Навпаки, збільшення індукції B поля або ємності C конденсатора веде до зменшення прискорення. В границі, коли $\frac{B^2 l^2 C}{m} \gg 1$ $w \rightarrow 0$, тобто у сильному магнітному полі перемичка ковзає практично рівномірно.

Задачі для контролю

1. Знайти індукцію магнітного поля у точці O контура зі струмом I , показаного на рис. 7.16. Радіуси a і b , а також кут ϕ відомі.



2. Визначити індукцію магнітного поля у точці O , якщо провідник зі струмом I має одну з конфігурацій, показаних на рис. 7.17.

Радіус зігнутої частини провідника дорівнює R , прямолінійні ділянки вважаються дуже довгими.

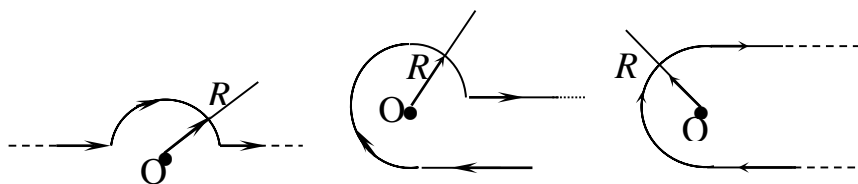


Рис. 7.17.

3. Довгий провідник зі струмом $I = 5$ А зігнутий під прямим кутом. Знайти магнітну індукцію у точці, яка розташована від площини провідника на відстань $l = 35$ см і знаходиться на перпендикулярі до провідників, що проходить через точку згину.

4. Непровідний тонкий диск радіуса R , рівномірно заряджений з поверхневою густиною заряду σ , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Знайти:

- а) індукцію магнітного поля у центрі диска;
- б) магнітний момент диска.

5. Замкнений контур зі струмом I знаходиться у полі довгого провідника зі струмом I_0 . Площина контура

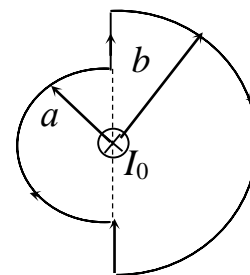


Рис. 7.18.

перпендикулярна до прямого провідника. Знайти момент сил Ампера, що діють на цей контур, якщо він має вигляд, показаний на рис. 7.18. Радіуси a і b відомі.

6. Прямий дріт з опором R_1 на одиницю довжини зігнутий під кутом 2α , як показано на рис. 7.19. Перемичка з такого ж дроту, розташована перпендикулярно до бісектриси кута 2α , утворює із зігнутим проводом замкнений трикутний контур. Цей контур поміщений

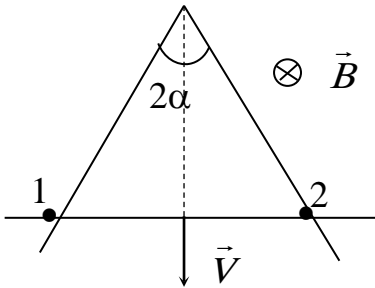


Рис. 7.19.

в однорідне магнітне поле з індукцією \vec{B} , перпендикулярне до його площини. Знайти напрямок і силу струму I , який тече у контурі, коли перемичка рухається з постійною швидкістю V . Опором в місцях контактів 1 і 2 знехтувати.

Задачі для самостійного розв'язання

1. По круговому витку радіуса $R = 100$ мм із тонкого дроту циркулює струм $I = 1$ А. Знайти магнітну індукцію а) в центрі витка; б) на осі витка в точці, яка відстоїть від його центра на $x = 100$ мм.

Відповідь: а) $B = \frac{\mu_0 I}{2R} = 6,3$ мкТл;

б) $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = 2,3$ мкТл.

2. Знайти індукцію магнітного поля в центрі контура, що має вигляд прямокутника, якщо його діагональ $d = 16$ см, кут між діагоналями $\phi = 30^\circ$ і струм у контурі $I = 5$ А.

Відповідь: $B = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \phi} = 0,1$ мТл.

3. Знайти магнітну індукцію в точці O , якщо провідник зі струмом $I = 8$ А має вигляд, показаний на рис. 7.20. Радіус зігнутої частини провідника $R = 100$ мм, прямолінійні ділянки дуже довгі.

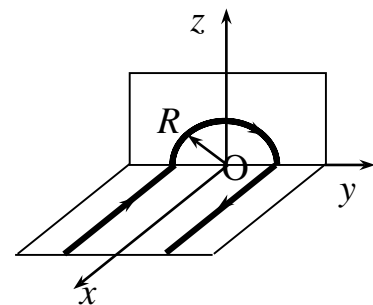


Рис. 7.20.

Відповідь: $B = \sqrt{4 + \pi^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = 0,3$ мкТл.

4. Непровідна сфера радіуса $R = 50$ мм, заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду $\sigma = 10$ мкКл/м², обертається з кутовою швидкістю $\omega = 70$ рад/с навколо осі, що проходить через її центр. Знайти магнітну індукцію у центрі сфери.

Відповідь: $B = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R = 29$ пТл.

5. Знайти модуль і напрямок сили, що діє на одиницю довжини тонкого провідника зі струмом $I = 8$ А в точці O , якщо провідник має одну з конфігурацій, показаних на рис. 7.21 $R = 10$ см, $l = 20$ см, паралельні ділянки – нескінченно довгі.

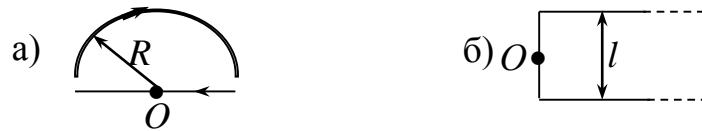


Рис. 7.21.

Відповідь: а) $F_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0,2$ мН/м; б) $F_1 = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l} = 0,13$ мН/м.

6. Дрiт, що має форму параболи $y = kx^2$, знаходиться в однорiдному магнiтному полi з iндукцiєю B (рис. 7.22). З вершини параболи в момент $t = 0$ почали перемiщати перемичку. Знайти е.р.с. iндукцiї в утвореному контурi як функцiю y , якщо перемичку перемiщують:

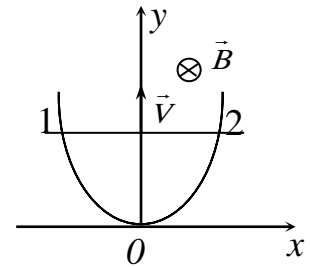


Рис. 7.22.

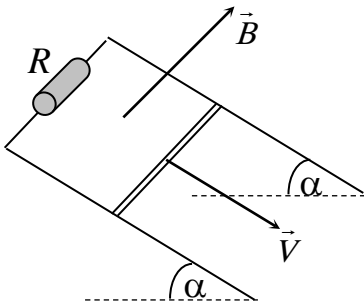
а) з постійною швидкістю V ;

б) з постійним прискоренням a , причому в момент $t = 0$ швидкість перемички дорівнювала нулю.

Відповідь: а) $\varepsilon_{iнд} = 2BV\sqrt{\frac{y}{k}}$;

б) $\varepsilon_{iнд} = By\sqrt{\frac{8a}{k}}$.

6. По двом гладким мідним шинам, встановленим під кутом α до



горизонту, ковзає під дією сили тяжіння мідна перемичка маси m . Шини замкнуті на опір R . Відстань між шинами l . Система знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B , перпендикулярному до площини, в якій переміщується перемичка (рис. 7.23). Опір шин, перемички і ковзаючих контактів, а також самоіндукція контура нехтовно малі. Знайти

Рис. 7.23.

постійну швидкість перемички (шини вважати досить довгими).

Відповідь:
$$V = \frac{mg \cdot R \sin \alpha}{B^2 l^2}.$$

VIII. РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ І МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

Вивчаючи рух різних заряджених частинок в електричних і магнітних полях, можна визначити відношення e/m і у такий спосіб отримати інформацію про природу самих частинок і про ті процеси, в яких вони виникають. Впливаючи на потоки електронів та іонів електричними і магнітними полями, можна керувати цими потоками. Це лежить в основі дії практично усіх електронних приладів (осцилографів, електронних мікроскопів, прискорювачів тощо.).

Якщо частинка, яка має заряд q , рухається у просторі, де є електричне поле напруженістю \vec{E} і магнітне поле індукцією \vec{B} , то рівняння її руху має вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \cdot \vec{B}]. \quad (A)$$

У загальному випадку розв'язання цього рівняння має деякі труднощі. Тому розглянемо тільки кілька окремих випадків.

§ 42. Рух заряджених частинок в однорідному електричному полі

Нехай позитивно заряджена частинка, яка рухалася зі швидкістю v_0 вздовж осі OX (система координат вибрана, як показано на рис. 8.1), потрапляє в електричне поле плоского конденсатора. Поле конденсатора

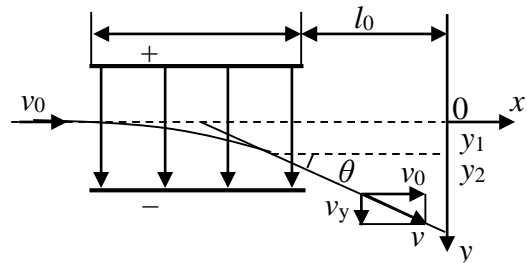


Рис. 8.1.

вважатимемо однорідним. Тоді: $\vec{B} = 0$, $E_x = E_z = 0$, $E_y = E$.

У цьому випадку рівняння (A) зводиться до двох скалярних рівнянь, які є його проєкціями на осі x і y відповідно:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0, m \frac{dv_y}{dt} = qE.$$

З цих рівнянь легко знайти, що $v_x = \text{const} = v_0$, $v_y = \frac{q}{m}Et + \text{const}$ (аналогія з рухом тіла, кинутого горизонтально), за $t = 0$: $v_y(0) = 0$, звідки випливає, що $\text{const} = 0$, остаточно отримаємо:

$$v_y = \frac{q}{m}Et.$$

Цей розв'язок має місце тільки у процесі руху зарядженої частинки між обкладинками конденсатора, тобто для часу $0 \leq t \leq \frac{L}{v_0}$; де L – довжина пластин конденсатора. На виході з конденсатора складові швидкості частинки матимуть значення: $v_x = v_0$, $v_y^{\text{max}} = \frac{q}{m}Et_{\text{max}} = \frac{q}{m}E \frac{L}{v_0}$.

Легко знайти кут відхилення частинки від напрямку початкового руху:

$$\text{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y^{\text{max}}}{v_x} = \frac{q}{m} \frac{LE}{v_0^2}.$$

Отже, кут відхилення істотно залежить від величини питомого заряду. Різні частинки в одному і тому ж полі відхиляються по-різному, що дає змогу розділяти частинки, пропускаючи пучки, що складаються з різних частинок, через однорідне електричне поле.

Знайдемо зміщення частинки відносно точки O , тобто точки, в яку вона б потрапила за відсутності поля (рис. 8.1).

У процесі руху між пластинами на частинку весь час діє сила, щоб знайти зміщення на виході з конденсатора, проінтегруємо v_y за часом, враховуючи, що:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q}{m}Et,$$

знайдемо

$$y_1 = \frac{q}{m} \int_0^{L/v_0} Et dt = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{L^2}{v_0^2}.$$

Далі, після виходу з конденсатора, частинка рухається рівномірно, її зміщення вздовж осі y визначається величиною y -складової швидкості на виході з області дії поля v_y^{max} : $y_2 = v_y^{max} t_1$, де $t_1 = \frac{l_0}{v_0}$ – час руху частинки від межі поля до екрана, l_0 – відстань від межі поля до екрана (рис. 8.1). Підставляючи значення v_y^{max} і t_1 , отримаємо:

$$y_2 = v_y^{max} t_1 = \frac{q}{m} E \frac{Ll_0}{v_0^2}.$$

Тут врахований той факт, що x -складова швидкості частинки в процесі руху не змінюється.

Тоді повне зміщення частинки дорівнюватиме:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{L^2}{v_0^2} + \frac{q}{m} E \frac{Ll_0}{v_0^2} = \frac{q}{m} E \frac{L}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} L + l_0 \right),$$

або

$$y = \left(\frac{1}{2} L + l_0 \right) tg\theta,$$

тобто частинки летять так, як якщо б джерело частинок знаходилося в центрі конденсатора і вилітали б вони під кутом θ до початкового напрямку швидкості руху частинок (рис. 8.1).

§ 43. Рух заряджених частинок в магнітному полі

Розглянемо інший окремий випадок, коли немає електричного поля, але є магнітне з індукцією B . Нехай частинка, що має швидкість v_0 , потрапляє в однорідне магнітне поле, перпендикулярне до швидкості частинки. Рівняння руху матиме вигляд:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v}_0 \cdot \vec{B}].$$

Оскільки діюча сила перпендикулярна до швидкості, вона не виконує роботи і, отже, не змінює величини швидкості, змінюється тільки її напрямок. Отже, величина сили $F = qv_0B$ залишається постійною. Дією цієї сили обумовлено доцентрове прискорення. Рівняння руху набуває вигляду:

$$m \frac{v_0^2}{R} = qv_0B,$$

тобто частинка рухається по колу, радіус якого легко визначити з рівняння руху:

$$R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{v_0}{\frac{q}{m}B}.$$

Характерна особливість розглянутого руху полягає в тому, що період обертання частинки по траєкторії не залежить від швидкості її руху (отже, від енергії і від радіуса траєкторії):

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{mv_0}{v_0qB} = \frac{2\pi}{\frac{q}{m}B}.$$

Частота

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m}B$$

називається циклотронною частотою частинки. І період, і частота залежать тільки від типу частинок та індукції магнітного поля.

Легко зрозуміти характер руху частинки і в тому випадку, коли її швидкість спрямована під довільним кутом до вектора магнітної індукції в однорідному магнітному полі. Внаслідок принципу незалежності рухів швидкість частинки можна розкласти на дві складові: поздовжню

$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha$ – вздовж поля і поперечну $v_{\perp} = v_0 \sin \alpha$ – перпендикулярну складову швидкості до магнітного поля (рис. 8.2).

На частинку діє сила Лоренца, обумовлена поперечною складовою швидкості v_{\perp} , яка змушує її рухатися по колу, яке лежить в площині, перпендикулярній до поля, радіус цього кола, як показано вище:

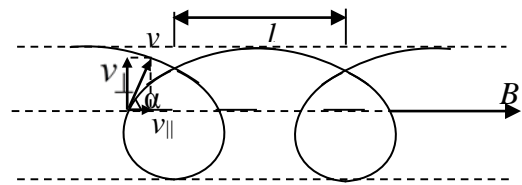


Рис. 8.2.

$$R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\frac{q}{m} B}$$

Оскільки сила, що діє на частинку, яка рухається уздовж поля, дорівнює нулю, то поздовжня складова швидкості v_{\parallel} з плином часу не змінюється. Траєкторія результуючого руху представляє гвинтову лінію (спіраль), крок якої визначається зміщенням частинки уздовж магнітного поля за час повного оберту навколо перпендикулярного напрямку, а радіус збігається зі знайденим вище радіусом кола (рис. 8.2):

$$l = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{\frac{q}{m} B} v_0 \cos \alpha$$

Розглянуті окремі випадки руху дають змогу якісно зрозуміти характер руху частинки і у загальному випадку.

Використовуючи закони руху частинок в електричному полі, Р. Міллікен у 1909 р. визначив заряд електрона. Закони руху заряджених частинок в електричних і магнітних полях покладені в основу роботи електронно-променевих трубок, мас-спектрографів, датчиків Холла, усіх прискорювачів – приладів для вивчення елементарних частинок, зокрема і Великого адронного колайдера, найбільшої експериментальної установки у світі, на якому був відкритий бозон Хіггса – перша цеглинка будови матерії.

ІХ. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ

§ 44. Вільні коливання у контурі

Коло, яке містить індуктивність і ємність, називається коливальним контуром, оскільки в такому колі можуть виникати електричні коливання.

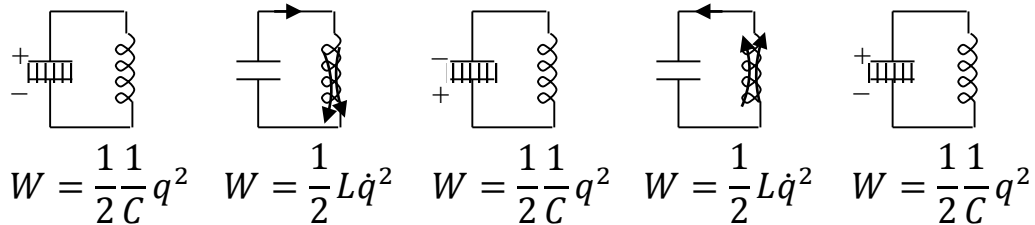


Рис. 9.1.

Коливальний процес в контурі можна викликати двома способами: або надавши обкладинкам конденсатора заряд, тобто створивши між ними електричне поле, або збудивши струм у котушці індуктивності. Нехай в початковий момент часу обкладинкам конденсатора був наданий заряд $\pm q$. У зазорі між обкладками конденсатора виникне електричне поле з енергією $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$. Якщо замкнути конденсатор на індуктивність, він почне розряджатися, і в контурі потече струм, який обумовлений електричним полем конденсатора. Енергія електричного поля при цьому буде зменшуватися. Зростаючий струм через індуктивність створить магнітне поле, енергія якого дорівнює $W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$. Оскільки контур ідеальний, $R = 0$, енергія буде зберігатися (рис. 9.1). У момент, коли напруга на конденсаторі дорівнюватиме нулю, тобто дорівнюватиме нулю енергія електричного поля, енергія магнітного поля буде максимальна, $I = I_{max}$. Надалі струм буде зменшуватися, при цьому виникне підтримуюча його е.р.с. самоіндукції, конденсатор почне заряджатися. Коли заряд досягне початкової величини q , струм буде дорівнювати нулю, все повториться в зворотному напрямку, і контур повернеться у початковий стан. Послідовність цих перетворень схематично представлена на останньому рисунку (рис. 9.1). Можна провести аналогію між електричними коливаннями

в контурі і механічними коливаннями вантажу на пружині, детально розглянутого у курсі механіки. Знайдемо період коливань в розглянутому контурі. Запишемо закон Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

З урахуванням того, що в розглянутому контурі

$$R = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt},$$

підставляючи ці співвідношення у попереднє рівняння, отримаємо:

$$0 = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt},$$

або, враховуючи, що сила струму є похідна заряду за часом

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

це рівняння вільних гармонічних коливань з частотою $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Розв'язок рівняння має вигляд:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де ω_0 – власна частота контура.

Період коливань заряду на обкладинках конденсатора у розглянутому коливальному контурі

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

визначається за формулою Томсона.

Знайдемо напругу на обкладинках конденсатора

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

і струм в контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тут $I_m = \omega_0 q_m$ і $U_m = q_m/C$ – амплітудні значення струму і напруги в контурі.

Напруга на конденсаторі відстає по фазі на $\frac{\pi}{2}$ від струму.

Легко знайти зв'язок між амплітудними значеннями струму і напруги в контурі:

$$U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

§ 45. Вільні затухаючі коливання

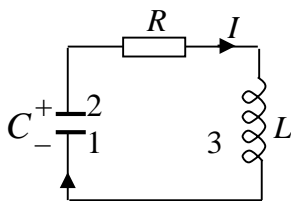


Рис. 9.2.

У реальному контурі завжди є відмінний від нуля активний опір (рис. 9.2). Тоді:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s,$$

або

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}.$$

Враховуючи, що сила струму є перша похідна заряду за часом, і виконавши прості перетворення, отримаємо:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Увівши позначення $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт затухання, матимемо:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Це рівняння аналогічне рівнянню затухаючих механічних коливань. В умовах, коли можливий коливальний процес, тобто $\beta^2 < \omega_0^2$, $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, розв'язок має стандартний вигляд:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \omega_0.$$

Зауважимо, що частота затухаючих коливань менша за частоту вільних гармонічних коливань в контурі.

За $R = 0$ цей розв'язок збігається з попереднім. Напруга на обкладинках конденсатора є

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Диференціюючи заряд і виконуючи елементарні перетворення, з урахуванням того, що $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, знайдемо силу струму:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right] \omega_0.$$

Введемо кут ψ :

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}; \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}.$$

Тоді струм можна записати у вигляді:

$$I = \omega_0 q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi).$$

Оскільки $\cos \psi < 0$, $\sin \psi > 0$, різниця фаз між струмом і напругою визначається нерівністю $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \pi$. Отже, за наявності в контурі активного опору R , відставання напруги від сили струму визначається кутом ψ і стає

більше $\frac{\pi}{2}$. З наведених виразів видно, що через

певний час $\tau = \frac{1}{\beta}$ коливання в контурі практично

затухають.

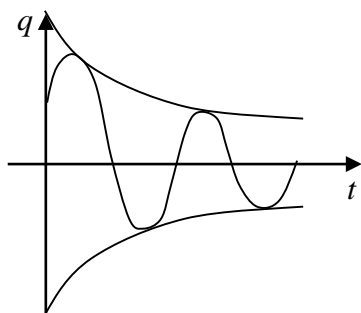


Рис. 9.3.

Графік залежності заряду на обкладинках конденсатора від часу має вигляд, представлений на рис. 9.3.

Отримані результати показують, що за наявності в коливальному контурі активного опору R коливання стають затухаючими, оскільки енергія, запасена в контурі, витрачається на нагрівання, тобто переходить у внутрішню енергію активного опору.

Для характеристики електричного коливального контура використовують такі параметри: логарифмічний декремент затухання, добротність і критичний опір. Розглянемо їх більш детально.

Для характеристики швидкості затухання введемо логарифмічний декремент затухання як логарифм натуральний відношення амплітудних значень через період:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T.$$

У курсі механіки було показано, що логарифмічний декремент затухання чисельно дорівнює оберненому числу коливань, протягом яких амплітуда коливань зменшується в e разів. Ввівши час релаксації $\beta = 1/\tau$ – час, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів, отримаємо $\lambda = T/\tau = 1/N_e$.

Враховуючи, що $\beta = R/2L$, $T = 2\pi/\omega$ – умовний період згасаючих коливань, для логарифмічного декременту затухання матимемо $\lambda = \frac{\pi R}{L\omega}$, звідки видно, що λ – характеристика контура. У випадку, коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, тобто слабого затухання, логарифмічний декремент затухання може бути записаний у вигляді: $\lambda = \pi R \sqrt{C/L}$.

Введемо ще одну характеристику контура – добротність, яка визначається як величина, обернено пропорційна логарифмічному декременту затухання:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{L\omega}{R}.$$

Q тим більше, чим більше N_e , тобто чим менше затухання в контурі. У випадку слабого затухання отримаємо:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротність можна визначити й інакше:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

де W – енергія, запасена в контурі в даний момент часу, ΔW – втрати енергії за один період коливань.

У випадку малого затухання частоту можна розкласти в ряд

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega_0^2} + \dots \right),$$

якщо $\beta \ll \omega_0$, $\omega \cong \omega_0$, тобто якщо $\frac{R}{2L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$ частота затухоючих коливань близька до частоти власних коливань в контурі.

У разі $\beta^2 \geq \omega_0^2$, тобто $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$, частота буде уявною $\omega' = i\omega$, і процес стане аперіодичним. Період коливань в разі виконання рівності в написаному вище співвідношенні стає нескінченно великим $T \rightarrow \infty$, замість коливань матимемо монотонний розряд конденсатора. Відповідний опір називається критичним

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

звідки

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

§ 46. Вимушені електричні коливання

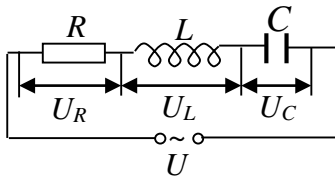


Рис. 9.4.

У механіці було показано, що для того, щоб викликати у системі вимушені коливання, потрібно компенсувати втрати енергії, тобто чинити на неї періодичний зовнішній вплив. Це можна зробити, подаючи в коло, що містить активний опір R , індуктивність L і ємність C змінну напругу:

$$U = U_m \cos \omega t.$$

Із закону Ома отримаємо:

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} + U_m \cos \omega t.$$

Вчиняючи, як і у попередньому випадку, будемо мати:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

де, як і раніше, $\omega_0^2 = 1/LC$; $2\beta = R/L$.

За формою це рівняння збігається з рівнянням для вимушених коливань механічної системи. Частинний розв'язок має вигляд:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (\text{A})$$

тут:

$$q_m = \frac{U_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Індуктивність L відіграє у вимушених коливаннях в коливальному контурі таку ж роль, як маса у механічних коливаннях.

Підставивши ω_0 і β , отримаємо:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Для отримання загального розв'язку необхідно додати ще загальний розв'язок однорідного рівняння (рівняння затухаючих коливань):

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha); \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Однак через час $\tau = 1/\beta$, як зазначено раніше, воно практично затухне, отже, встановлені коливання величини заряду описуватимуться формулою (A). За аналогією з попереднім легко знайти вираз для сили струму:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Тут ми ввели кут $\varphi = \psi - \pi/2$.

Використовуючи амплітудне значення величини заряду, легко знайти амплітудне значення сили струму:

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Початкове рівняння можна представити у вигляді суми спадів напруги на елементах контура:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos \omega t.$$

Тоді $U_R = RI_m \cos(\omega t - \varphi)$ – спад напруги на активному опорі.

Для ємності можна записати:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{I_m}{\omega C}.$$

Аналогічно для індуктивності:

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_{Lm} = \omega LI_m.$$

Ці співвідношення показують, що напруга на ємності відстає по фазі від сили струму на $\frac{\pi}{2}$, а на індуктивності випереджає його на $\frac{\pi}{2}$.

Співвідношення між струмом і напругою можна представити у вигляді векторної діаграми (рис. 9.5). При цьому коливання, що складаються, подаються у вигляді векторів, кути між якими визначаються початковими фазами, а модулі векторів задаються амплітудними значеннями напруг на

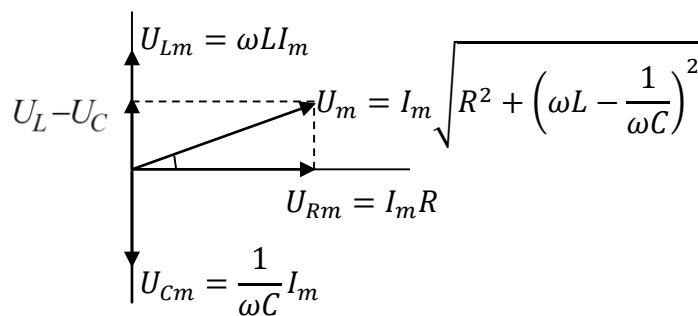


Рис. 9.5.

відповідному елементі кола. Відповідно до цього амплітуда напруги у колі визначається як модуль векторної суми трьох зазначених векторів. Вираз

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

називається повним електричним опором кола або імпедансом.

У колі з вимушеними коливаннями можливе явище резонансу. (Нагадаємо, що резонансом називається явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань за певного значення частоти зовнішньої напруги). Оскільки закони зміни струмів і напруг розрізняються, то і прийнято говорити про резонанс струмів і напруг.

Максимальне значення сили струму спостерігається за $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, тобто резонансна частота для струму збігається з власною частотою контура.

Отже, для струму:

$$\omega_{\text{рез}}^I = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

За $\omega = 0$, $I = 0$, оскільки постійний струм не може текти через конденсатор (рис. 9.6).

Резонанс напруги і резонанс заряду збігаються за частотою, оскільки мають однакові частотні залежності. Розгляд проведемо для заряду:

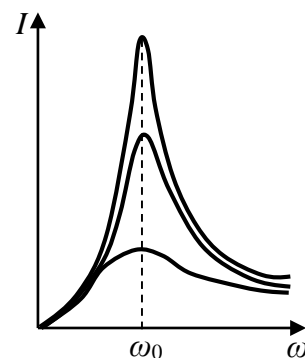


Рис. 9.6.

$$q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

З умови максимуму q_m отримаємо:

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0.$$

Звідки легко знайти відповідні резонансні частоти:

$$\omega_{рез}^q = \omega_{рез}^U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

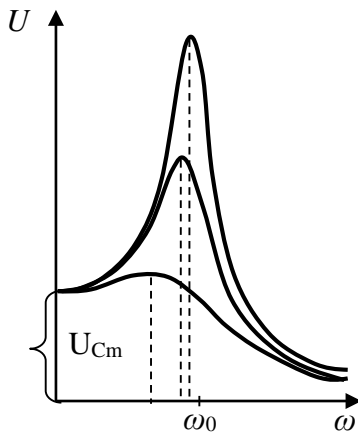


Рис. 9.7

Амплітудне значення напруги тим більше і пік вужче, чим менше коефіцієнт затухання β (рис. 9.7). При прямуванні частоти до нуля усі криві сходяться в одній точці, відсікаючи на осі напруги відрізок U_{Cm} , який дорівнює напрузі на конденсаторі, при підключенні його до джерела постійного струму напругою U_m .

§ 47. Змінний струм

Змінним струмом називається струм, який періодично змінюється за величиною і напрямком. Вимушені коливання, що встановилися, можна розглядати як протікання у колі з активним опором R , індуктивністю L і ємністю C змінного струму, обумовленого змінною напругою, яку можна отримати від генератора змінної напруги, принцип дії якого заснований на явищі електромагнітної індукції:

$$U = U_m \cos \omega t.$$

Струм у колі змінюється за законом:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

де:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Написане співвідношення називається законом Ома для кола змінного струму. Вираз

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},$$

як зазначено вище, визначає повний електричний опір кола і називається імпедансом.

З наведених співвідношень випливає, що струм відстає по фазі від напруги на кут φ , який залежить від параметрів кола і частоти зовнішньої напруги:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Якщо коло містить тільки активний опір R , матимемо:

$$IR = U_m \cos \omega t, I_m = \frac{U_m}{R}, \operatorname{tg} \varphi = 0, \varphi = 0.$$

Звідки видно, що за наявності у колі змінного струму тільки активного опору струм збігається по фазі з напругою.

Якщо коло містить тільки індуктивність L ($R = 0, C \rightarrow \infty$), із закону Ома отримаємо:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}.$$

$X_L = \omega L$ називається реактивним індуктивним опором. Струм в індуктивності відстає по фазі від напруги на кут $\frac{\pi}{2}$ (оскільки $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$). З виразу для реактивного індуктивного опору видно, що він перетворюється на нуль за $\omega = 0$, тобто індуктивність не чинить опору постійному струму.

Коли коло містить тільки ємність C : ($R = 0, L = 0$):

$$I_m = \frac{U_m}{1/\omega C},$$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – реактивний ємнісний опір. Струм через конденсатор випереджає напругу на кут $\frac{\pi}{2}$ (оскільки $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$). За $\omega = 0$ ємнісний опір стає нескінченно великим, постійний струм через конденсатор текти не може, оскільки наявність конденсатора, по суті, означає розрив кола.

За кінцевої ємності $C \neq 0$ і відмінної від нуля індуктивності $L \neq 0$, але рівного нулю активного опору $R = 0$ струм визначається співвідношенням

$$I_m = \frac{U_m}{|\omega L - 1/\omega C|},$$

де $X = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = |X_L - X_C|$ – реактивний опір або реактанс.

Будь-яке коло завжди містить активний опір, індуктивність і ємність. Розглянуті вище окремі випадки означають, що в конкретних умовах тими чи іншими параметрами можна знехтувати.

§ 48. Потужність у колі змінного струму

Нехай у розглянутому вище R, L, C колі діє змінна напруга. У цьому колі буде текти змінний струм. При цьому в ньому буде виділятися потужність, миттєве значення якої запишеться у вигляді:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

враховуючи, що добуток косинусів можна представити у вигляді суми

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$

миттєву потужність можна переписати так:

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t - \varphi).$$

Для середньої потужності, яка виділяється за період, після усереднення отримаємо:

$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi.$$

Тут враховано, що середнє за період значення косинуса дорівнює нулю $\langle \cos \varphi(t) \rangle_0^T = 0$.

Порівнюючи вирази для середньої і миттєвої потужності бачимо, що миттєва потужність коливається навколо середнього значення з частотою вдвічі вищою, ніж частота напруги. Виразимо $\cos \varphi$ через параметри кола, скориставшись співвідношенням між тригонометричними функціями

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Звідки

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}.$$

Підставляючи знайдене значення косинуса в формулу для середньої потужності P і враховуючи закон Ома для змінного струму $U_m/Z = I_m$, отримаємо:

$$P = \frac{RI_m^2}{2}.$$

Згадаємо, що теплова потужність, яка виділяється у колі постійного струму, визначається співвідношенням $P_n = RI_n^2$. Порівнюючи два останні співвідношення, бачимо, що постійний струм, сила якого дорівнює $I_{ef} = I_m/\sqrt{2}$, розвиває таку ж потужність. Ця величина називається діючим (або ефективним) значенням сили струму. Інакше кажучи, діюче значення сили струму – це таке значення сили змінного струму, яке виділяє на активному опорі таку ж потужність, як і постійний струм, такої ж величини. Аналогічно $U_{ef} = U_m/\sqrt{2}$ – діюче значення напруги.

Формулу для потужності у колі змінного струму можна записати через діючі значення:

$$P = I_{ef}U_{ef} \cos \varphi,$$

$\cos \varphi$ називається коефіцієнтом потужності. Якщо у колі відсутні ємність і індуктивність, $\cos \varphi = 1$, якщо $R = 0$, то $\cos \varphi = 0$, в цьому разі активна потужність у колі не виділяється. У техніці $\cos \varphi$ прагнуть зробити якомога більшим, цього можна досягти, оптимально розподіливши у колі ємність і індуктивність так, щоб реактанс був мінімальним.

Х. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

У попередніх розділах було показано, що взаємодія між зарядженими частинками здійснюється через особливий вид матерії, який називається електромагнітним полем. Поняття електричного і магнітного полів були введені у науку М. Фарадеєм у 1830 р. Д. Максвелл у 60-х рр. ХІХ ст. розвинув ідеї М. Фарадея і отримав рівняння, що описують електромагнітне поле. Уся теорія електромагнетизму побудована на отриманих Максвеллом рівняннях, які застосовні не тільки до постійних, а й до змінних електромагнітних полів. Можна сказати, що ці рівняння є фундаментом усієї електродинаміки, як закони Ньютона є фундаментом усієї класичної механіки. Далі розглянемо рівняння Максвелла більш детально.

§ 49. Вихрове електричне поле

Розглянемо явище електромагнітної індукції в контурі, який має незмінну геометрію і є нерухомим, а зміна магнітного потоку обумовлена індукцією змінного магнітного поля. Виникнення струму в контурі може бути пояснено тільки появою сторонніх сил, обумовлених змінним магнітним полем. Хімічних і теплових процесів не відбувається, отже, вони не можуть бути причиною виникнення е.р.с. в контурі. Це не магнітні сили за своєю природою, оскільки магнітні сили діють тільки на рухомі заряди. Тому струм може бути обумовлений тільки виникаючим внаслідок зміни магнітного поля електричним полем. Позначимо його напруженість E_H . Виникаюча при цьому е.р.с. дорівнює циркуляції напруженості цього поля уздовж контура:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_H d\vec{l}.$$

Але з іншого боку $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$, а $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$, тоді

$$\oint \vec{E}_H d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Оскільки контур і поверхня нерухомі, можна поміняти місцями операції диференціювання й інтегрування:

$$\oint \vec{E}_H d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Скористаємося теоремою Стокса ($\oint \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S}$).

Тоді

$$\int_S \text{rot} \vec{E}_H d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

або, оскільки S – довільне, з рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних функцій:

$$\text{rot} \vec{E}_H = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Максвелл припустив, що магнітне поле, яке змінюється в часі, породжує у навколишньому просторі змінне вихрове електричне поле E_H (контур є просто інструментом для його реєстрації).

Поле \vec{E}_H істотно відрізняється від електростатичного поля системи нерухомих зарядів \vec{E}_q . Поле \vec{E}_q потенціальне, отже робота сил цього поля по замкненому контуру дорівнює нулю:

$$A = q \oint \vec{E}_q d\vec{l} = 0.$$

Скориставшись теоремою Стокса, запишемо:

$$\oint \vec{E}_q d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E}_q d\vec{S} = 0,$$

звідки

$$\operatorname{rot} \vec{E}_q = 0.$$

Напруженість результуючого електричного поля дорівнює, у силу принципу суперпозиції, сумі напруженостей полів \vec{E}_H і \vec{E}_q :

$$\vec{E} = \vec{E}_H + \vec{E}_q.$$

Тоді

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Отже, ми дійшли висновку, що електричне і магнітне поля тісно пов'язані, і не має сенсу їх окремий розгляд. Отримане рівняння є одним з основних рівнянь теорії електромагнетизму Максвелла.

Значення \vec{B} , а, отже, і \vec{E} , залежать від вибору системи відліку. Тому завжди можна підібрати такі інерціальні системи відліку, в яких будуть відмінні від нуля напруженості і електричного, і магнітного полів, будуть відмінні від нуля напруженості або магнітного, або електричного полів.

§ 50. Струм зміщення

Для стаціонарного магнітного поля із закону повного струму

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

або

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad \int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

раніше було отримано:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (*)$$

Для густини струму провідності справедливе рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Електромагнітне поле стаціонарне лише за умови, що густина зарядів ρ і густина струму провідності j не залежать від часу, тоді $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, і лінії струму замкнені.

Перейдемо до вивчення змінних електромагнітних полів і з'ясуємо, чи справедливе рівняння (*) у випадку полів, що змінюються з часом.

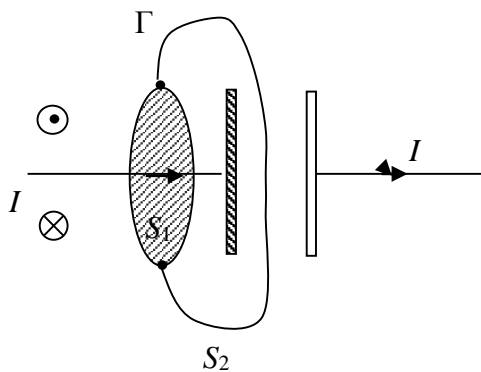


Рис. 10.1.

Для цього розглянемо магнітне поле, яке створюється струмом I , що тече у процесі зарядки конденсатора від джерела постійної напруги. Цей струм змінюється з часом, по мірі зростання напруги між обкладками конденсатора він спадає. Лінії струму провідності між обкладками конденсатора зазнають розриву.

Розглянемо круговий контур Γ , що охоплює струм, і проінтегруємо (*) по поверхні S_1 , обмеженій контуром (рис. 10.1):

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{S},$$

або, скориставшись теоремою Стокса

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} d\vec{S} = I.$$

Проведемо ті ж викладки для поверхні S_2 , яка спирається на той самий контур Γ , але не перетинає струм. Тоді:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{j} d\vec{S} = 0.$$

Отже, для змінного струму рівняння (*) перестає бути справедливим. Очевидно, в цьому рівнянні має бути доданок, який визначається похідними полів за часом, що перетворюватиметься в нуль у випадку постійних полів і не впливатиме на отримані для них результати.

Несправедливість рівняння (*) у випадку змінних полів можна показати, виходячи із загальних міркувань. Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння (*):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j},$$

але дивергенція ротора будь-якого вектора тотожно дорівнює нулю, тому $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0$, тобто $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ теж завжди, що суперечить рівнянню неперервності.

Для узгодження цих рівнянь Максвелл ввів у праву частину рівняння (*) додатковий доданок, що має розмірність густини струму, і назвав його струмом зміщення. Тоді:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}.$$

Густина повного струму дорівнює сумі густин струму провідності і струму зміщення:

$$\vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}.$$

Беручи дивергенцію від обох частин останньої рівності і враховуючи, що $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0$, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{j}_n = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{зм}},$$

або

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{зм}} = -\operatorname{div} \vec{j}.$$

Врахувавши рівняння неперервності для густини струму провідності, для густини струму зміщення, отримаємо:

$$\operatorname{div} \vec{J}_{\text{ЗМ}} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Виразимо густину струму зміщення $\vec{J}_{\text{ЗМ}}$ через величини, що характеризують поля. Згадаємо, що

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Продиференціювавши обидві частини останнього співвідношення за часом і скориставшись комутативністю операцій диференціювання по координатах і часу, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

звідки:

$$\operatorname{div} \vec{J}_{\text{ЗМ}} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \text{ або } \vec{J}_{\text{ЗМ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

тоді:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Термін «струм зміщення» має умовний характер. Це електричне поле, що змінюється з часом. З усіх властивостей, притаманних струму, струм зміщення має тільки одну властивість: здатність створювати магнітне поле.

Увівши струм зміщення, Максвелл зрівняв у правах електричне та магнітне поля. З явища електромагнітної індукції випливає, що магнітне поле, яке змінюється, створює електричне поле, з останнього рівняння випливає, що електричне поле, яке змінюється, створює магнітне поле.

Вище було зауважено, що лінії струму провідності у зазорі між обкладинками конденсатора зазнають розриву, проте вони неперервно переходять у лінії струму зміщення на межах обкладинок конденсатора, отже, лінії повного струму, як і раніше, залишаються неперервними.

§ 51. Система рівнянь Максвелла

Введення у розгляд струму зміщення дало змогу Максвеллу об'єднати результати досліджень електричного і магнітного полів і створити єдину теорію електромагнітних явищ. Теорія Максвелла пояснила усі відомі на той час електромагнітні явища і передбачила нові, які були відкриті пізніше. Зокрема, з теорії Максвелла випливав висновок про існування електромагнітних хвиль, які поширюються зі швидкістю світла. Вивчення цих хвиль привело до створення електромагнітної теорії світла.

В основу теорії електромагнетизму покладені рівняння Максвелла, які в теорії електромагнітних явищ, як зазначено вище, відіграють ту ж саму роль, що в механіці закони Ньютона. Таких рівнянь 4.

Першу пару рівнянь складають:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

– вираз закону електромагнітної індукції. З факту відсутності у природі магнітних зарядів випливає, що

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Друга пара:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

– зв'язок між струмом провідності, струмом зміщення і породжуваним магнітним полем. Зв'язок між індукцією електричного поля і густиною сторонніх зарядів дає останнє рівняння

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Ці чотири рівняння представляють рівняння Максвелла у диференціальній формі.

Кожне з векторних рівнянь еквівалентне трьом скалярним. Вийде 8 рівнянь з 12 невідомими, щоб замкнути систему, потрібно записати отриманий раніше зв'язок полів, струмів і зарядів, який називається матеріальними співвідношеннями. В ізотропному неферромагнітному середовищі вони мають вигляд:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Усі ці рівняння складають основу електродинаміки середовищ, які знаходяться у стані спокою.

Проінтегрувавши рівняння Максвелла, отримаємо їх в інтегральній формі:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

§ 52. Електромагнітні хвилі. Хвильове рівняння для електромагнітного поля

Отже, ми з'ясували, що змінне електричне поле породжує, взагалі кажучи, теж змінне магнітне поле, воно, зі свого боку, породжує електричне і т. д. Ці поля описуються рівняннями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

При збудженні у деякій точці простору, наприклад, за допомогою зарядів, які коливаються, змінного електричного поля, у навколишньому просторі виникає послідовність взаємного перетворення електричного і магнітного полів, що поширюються від точки до точки. Цей процес періодичний у часі і у просторі, тобто є хвилею.

Як було зазначено, існування електромагнітних хвиль впливає з рівнянь Максвелла. Покажемо це. Розглянемо однорідне нейтральне $\rho = 0$ і непровідне $j = 0$ середовище з постійними діелектричною $\varepsilon = \text{const}$ і магнітною $\mu = \text{const}$ проникностями. Використовуючи матеріальні співвідношення, легко отримати:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu\mu_0 \operatorname{div} \vec{H},$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}.$$

Для цього випадку рівняння Максвелла записуються у вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Використання матеріальних співвідношень дало змогу позбутися у рівняннях індукції електричного D і магнітного B полів.

Застосуємо операцію rot до обох частин I рівняння і скористаємося комутативністю операцій диференціювання за координатами і часом:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}. \quad (*)$$

Перетворимо ліву частину:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \left[\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{E}] \right] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

оскільки $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ і скалярний квадрат оператора Гамільтона дорівнює оператору Лапласа $\vec{\nabla}^2 = \Delta$. Враховуючи, що $\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ і підставляючи все у (*), отримаємо:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ або } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

оскільки $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, остаточно останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Множник перед другою похідною за часом визначає швидкість поширення хвилі у середовищі $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Аналогічні перетворення третього рівняння дадуть:

$$\Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Причому ці рівняння пов'язані одне з одним, оскільки отримані з рівнянь, що містять одночасно вектори напруженості електричного поля \vec{E} і магнітного поля \vec{H} .

Наприкінці цього параграфа нагадаємо основні поняття, що характеризують хвильові процеси.

Процес поширення коливань у просторі називається хвилею.

Якщо частинки середовища коливаються вздовж напрямку хвилі – хвиля поздовжня, якщо поперек – поперечна.

Геометричне місце точок, до яких доходять коливання в момент часу t , називається фронтом хвилі (або хвильовим фронтом).

Геометричне місце точок, що коливаються в одній фазі, називається хвильовою поверхнею.

Хвильовий фронт – 1, хвильових поверхонь – багато. Якщо хвильова поверхня – площина, хвиля плоска. Якщо сфера – хвиля сферична.

Відстань λ , на яку поширюється хвиля за період, називається довжиною хвилі.

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

$$\lambda \nu = v.$$

Тут v – швидкість поширення хвилі, T і ν відповідно її період і частота.

Рівняння плоскої хвилі має вигляд

$$\xi(x, t) = a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right],$$

$v = \frac{dx}{dt}$ – швидкість переміщення фази, або фазова швидкість (швидкість поширення хвилі), α – її початкова фаза.

У симетричній формі

$$\xi(x, t) = a \cos[\omega t - kx + \alpha],$$

де $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число, його можна визначити через довжину хвилі $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

§ 53. Плоска електромагнітна хвиля

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, яка поширюється у нейтральному ($\rho = 0$), непровідному ($j = 0$) середовищі з постійними діелектричною ε і магнітною μ проникностями. Нехай хвиля поширюється вздовж осі x , тобто вісь x спрямована перпендикулярно до хвильових поверхонь. Тоді вектори напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів, а значить, і їхні проєкції на осі координат, не залежатимуть від y і z . Тому, записавши рівняння Максвелла через проєкції векторів \vec{E} і \vec{H} на координатні осі, отримаємо наведену нижче систему.

Рівняння (5) показує, що E_x не може залежати від часу t , а рівняння (8) – від x . Аналогічно (1) і (4) для H_x . Відмінні від нуля проєкції E_x і H_x можуть бути обумовлені тільки постійними однорідними полями, що накладаються на електромагнітне поле хвилі. Поле хвилі має ненульові складові тільки уздовж осей y і z . Отже, вектори \vec{E} і \vec{H} перпендикулярні до напрямку поширення хвилі, звідки випливає, що електромагнітні хвилі поперечні. За відсутності зовнішніх постійних полів $E_x = H_x = 0$.

$$0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \left(-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Рівняння (2), (3) і (6), (7) можна об'єднати в незалежні групи:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, (*) \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, (**)$$

та

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

тобто змінне електричне поле, спрямоване вздовж осі $y - E_y$, породжує магнітне поле, спрямоване вздовж осі $z - H_z$, а H_z , зі свого боку $- E_y$, при цьому E_z та H_y не виникають, і навпаки.

Продиференціюємо (*) по x і у правій частині рівності поміняємо порядок диференціювання по координаті і часу, користуючись комутативністю відповідних операцій диференціювання:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

а $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ підставимо з (**), тоді отримаємо:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Враховуючи, що $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 1/v$, можемо записати:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Аналогічно для магнітного поля:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Це окремі випадки повного хвильового рівняння для хвилі, що поширюється зі швидкістю $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Розв'язок має вигляд:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1),$$

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$k = \omega/v$ – хвильовий вектор. Підставимо написані вирази у (*) і (**):

$$kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2),$$

$$kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1).$$

Щоб ці рівняння задовольнялися, необхідно щоб $\alpha_1 = \alpha_2$ і, крім того:

$$kE_m = \mu\mu_0\omega H_m,$$

$$kH_m = \varepsilon\varepsilon_0\omega E_m,$$

звідки

$$\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2.$$

Або

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_m = \sqrt{\mu\mu_0} H_m.$$

Якщо хвиля поширюється у вакуумі ($\mu = \varepsilon = 1$), то:

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 10^9} = \sqrt{(4\pi)^2 900} \approx 120\pi \approx 377.$$

Тобто у системі СІ напруженість електричного поля в хвилі у 377 разів більша за напруженість магнітного поля.

У векторній формі розв'язки запишуться у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kx),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kx).$$

Схематично процес поширення електромагнітної хвилі показаний на рис. 10.2.

Вектори напруженості електричного і магнітного полів з вектором швидкості хвилі складають праву трійку.

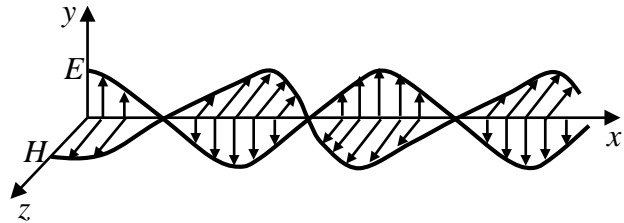


Рис. 10.2.

§ 54. Енергія електромагнітних хвиль

У процесі поширення електромагнітні хвилі переносять енергію. Густина енергії хвилі дорівнює сумі густин енергії електричного і магнітного полів хвилі:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Унаслідок попереднього співвідношення між амплітудними значеннями напруженостей електричного і магнітного полів $E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}$, густини енергії електричного і магнітного полів хвилі співпадають, тоді густину енергії хвилі можна представити як подвоєну густину енергії електричного поля хвилі:

$$w = 2w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2,$$

або

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{1}{v}EH.$$

Помноживши на швидкість поширення хвилі, отримаємо модуль вектора густини потоку енергії – енергію, що переноситься хвилею через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі, в одиницю часу:

$$S = wv = EH,$$

оскільки вектори \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні і утворюють з вектором швидкості хвилі \vec{v} правогвинтову систему, можна записати:

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}].$$

Вектор, який визначає густину потоку енергії, називається вектором Умова–Пойнтінга. Потік електромагнітної енергії через довільну поверхню σ є

$$\Phi = \int_{\sigma} \vec{S} d\vec{\sigma}.$$

Падаючи на деяку поверхню, електромагнітна хвиля буде поглинатися і передавати цьому тілу певний імпульс, тобто чинити на нього тиск.

Нехай на поверхню деякого тіла падає по нормалі до поверхні електромагнітна хвиля і повністю поглинається цим тілом. У цьому разі хвиля передає одиниці поверхні в одиницю часу імпульс, замкнений у циліндрі висотою v і площею $S = 1 \text{ м}^2$. Середній імпульс, переданий одиниці поверхні в одиницю часу, є тиск. Враховуючи, що густина імпульсу електромагнітної хвилі дорівнює w/c , легко знайти тиск електромагнітної хвилі:

$$P = \langle w \rangle.$$

П. М. Лебедев вперше виміряв тиск світла на тверді тіла у 1900 р. і у 1910 р. – тиск світла на газу. Отримані ним результати не суперечили теорії Максвелла. Тиск сонячного світла на Землю у ясний день становить $P = (35 \div 70) \text{ Па}$.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ ТА ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛІВ ІХ–Х

Змінний струм. На рис. 10.3 приведена схема коливального контура, що складається з конденсатора C , котушки індуктивності L і резистора R . Якщо опір контура дорівнює нулю, то він називається ідеальним, і коливання в ньому відбуваються з періодом

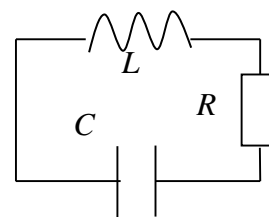


Рис. 10.3.

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (10.1)$$

Наявність опору R призводить до затухання коливань за законом:

$$U = U_{m0}e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (10.2)$$

де U – напруга; U_{m0} – початкова амплітуда напруги; β – коефіцієнт затухання; ω – частота коливань, що затухають; ω_0 – власна частота коливального контура.

Змінним називається струм, що змінюється з часом за гармонічним законом. У колі з послідовно з'єднаних конденсатора, котушки і опору напруга і сила струму змінюються згідно із законом

$$U = U_m \cos \omega t, \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

а значення сили струму і напруги пов'язані законом Ома:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad (10.3)$$

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Тут X_L і X_C – індуктивний і ємнісний опори. Напруга і струм зсунені по фазі на кут φ .

Середня потужність в колі змінного струму залежить від зсуву фаз φ і визначається законом Джоуля–Ленца:

$$P = I_{ef} U_{ef} \cos \varphi, \quad (10.4)$$

де $I_{ef} = I_m / \sqrt{2}$, $U_{ef} = U_m / \sqrt{2}$ – діючі значення струму і напруги.

Хвилі. Основні поняття. Хвилею називають процес поширення коливань у просторі. Геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі, утворює хвильову поверхню. За формою хвильової поверхні розрізняють плоскі, циліндричні та сферичні хвилі. У напрямку коливань у хвилі виділяють поздовжні і поперечні хвилі. Пружні хвилі можуть бути як поздовжніми (у газоподібних, рідких і твердих тілах), так і поперечними (в твердих тілах і на межах поділу середовищ). Електромагнітні хвилі є тільки поперечними. Для поперечних хвиль характерне явище поляризації.

Коливання у точці M , положення якої визначається радіус-вектором \vec{r} , відбувається за законом

$$\xi(t, \vec{r}) = a \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \alpha), \quad (10.5)$$

де a – амплітуда, ω – циклічна частота, α – початкова фаза, t – час, $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n}$ – хвильовий вектор, v – швидкість хвилі, \vec{n} – нормаль до хвильової поверхні. Рівняння (10.5) описує плоску монохроматичному хвилю з постійною амплітудою.

Плоска монохроматична хвиля (10.5) задовольняє хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (10.6)$$

Електромагнітні хвилі. Електромагнітними хвилями називають процес поширення змінного електромагнітного поля у просторі. На відміну від пружних, електромагнітні хвилі можуть поширюватися у вакуумі, тобто за відсутності середовища. Швидкість поширення електромагнітних хвиль у речовині визначається виразом

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (10.7)$$

де ε і μ – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища; ε_0 і μ_0 – електрична і магнітна сталі. У вакуумі ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) швидкість хвилі $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, що відповідає швидкості світла у вакуумі, яка є однією з фундаментальних фізичних сталих, які обмежують швидкість поширення взаємодій.

Електромагнітна хвиля є поперечною. Вектори \vec{E} , \vec{H} і \vec{v} утворюють праву трійку (рис. 10.4). Значення E і H пов'язані між собою співвідношенням:

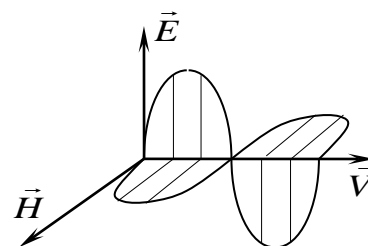


Рис. 10.4.

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H. \quad (10.8)$$

Густина енергії w і густина потоку енергії \vec{S} електромагнітної хвилі визначаються співвідношеннями

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \frac{\vec{E}\vec{H}}{v}, \quad \vec{S} = w \cdot \vec{v} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (10.9)$$

Для більшості речовин $\mu \approx 1$ (тільки у феромагнетиків $\mu \gg 1$), і швидкість електромагнітної хвилі визначається виразом

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n}, \quad (10.10)$$

де $n = \sqrt{\epsilon}$ – абсолютний показник заломлення середовища, c – швидкість світла у вакуумі.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. У коливальному контурі, який складається з конденсатора ємності C і котушки індуктивності L , здійснюються вільні незгасаючі коливання, за яких амплітуда напруги на конденсаторі дорівнює U_m . Знайти для довільного моменту часу зв'язок між струмом I в контурі і напругою U на конденсаторі. Розв'язати задачу як за допомогою закону Ома, так і енергетично.

Розв'язання

Запишемо закон Ома для кола 1–2–3 (рис. 10.5):

$$\left. \begin{array}{l} C, L, \\ U_m \\ I - ? \end{array} \right|$$

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}.$$

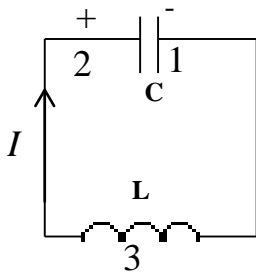


Рис. 10.5.

Для цього випадку

$$R = 0, \varphi_1 - \varphi_2 = -q/C,$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}, I = \frac{dq}{dt}.$$

Тут R – активний опір, q – заряд конденсатора, ε_i – е.р.с. самоіндукції. Після підстановки отримуємо таке рівняння для заряду:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

тут $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота коливань. Розв'язком цього рівняння є функція

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де α – початкова фаза, яку покладемо рівною нулю. Напряга на конденсаторі змінюється за законом

$$U = U_m \cos \omega_0 t, \quad U_m = \frac{q_m}{C}.$$

Силу струму знайдемо, продиференціювавши q :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}),$$

$I_m = \omega_0 q_m = U_m \sqrt{C/L}$. Струм випереджає напругу на конденсаторі на кут $\pi/2$.

Розв'яжемо задачу енергетично. Оскільки коливання незатухаючі, то повна енергія в контурі зберігається

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = E_0 = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Тут $\frac{CU^2}{2}$ – енергія конденсатора, $\frac{LI^2}{2}$ – енергія котушки, E_0 – повна енергія контура, яка дорівнює максимальній енергії конденсатора. Звідси знаходимо струм в контурі:

$$I^2 = \frac{C}{L}(U_m^2 - U^2) = \frac{C}{L}U_m^2(1 - \cos^2 \omega_0 t) = \frac{C}{L}U_m^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Тут підставлений вираз для напруги $U = U_m \cos \omega_0 t$. Вилучаючи корінь і враховуючи зсув фаз між струмом і напругою, отримуємо

$$I = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 2. Коло, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора ємністю $C = 22$ мкФ і котушки з активним опором $R = 20$ Ом та індуктивністю $L = 0,35$ Г, підключене до мережі змінного струму з амплітудою 180 В і частотою $f = 50$ Гц. Знайти амплітуду струму у колі, різницю фаз між струмом і напругою, виділену теплову потужність.

Розв'язання

Запишемо закон Ома (10.3) для кола змінного

$$\begin{array}{l} C = 22 \text{ мкФ} \\ R = 20 \text{ Ом} \\ L = 0,35 \text{ Г} \\ U_m = 180 \text{ В} \\ f = 50 \text{ Гц} \end{array}$$

струму:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

$$I - ? \quad P - ? \quad \varphi - ?$$

де I_m – амплітудне значення струму, Z – повний опір,

$X_L = \omega L$ – індуктивний опір, $X_C = 1/\omega C$ – ємнісний опір, $\omega = 2\pi f$ – циклічна частота. Підставляючи дані, знаходимо $X_L = 110$ Ом, $X_C = 145$ Ом, $Z = 40,3$ Ом, $I_m = 4,47$ А.

Зсув фаз між струмом і напругою знайдемо за формулою:

$$tg \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = -1,75, \quad \varphi = -60^\circ.$$

Потужність у колі знайдемо за законом Джоуля–Ленца

$$P = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi = \frac{I_m U_m}{2} \cdot \frac{R}{Z} = 200 \text{ Вт.}$$

Задача 3. Знайти діюче значення струму, якщо середнє значення його дорівнює I_0 , а сам струм змінюється за законом $I \sim |\sin \omega t|$.

Розв'язання

$\langle I \rangle = I_0,$
 $I \sim |\sin \omega t|$
 $I_{ef} - ?$

Середня потужність, виділена змінним струмом за період, визначається виразом:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) R dt, \quad (1)$$

де $T = 2\pi/\omega$, ω – період і частота змінного струму відповідно, R – опір. Діючим значенням I_{ef} змінного струму називають таке значення постійного струму, який виділяє таку ж потужність: $\langle P \rangle = I_{ef}^2 R$. Порівнюючи, знаходимо I_{ef} :

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}. \quad (2)$$

Представимо закон зміни струму у вигляді $I = I_m |\sin \omega t|$ і визначимо середнє значення струму за період

$$\begin{aligned} \langle I \rangle = I_0 &= \frac{I_m}{T} \int_0^T |\sin \omega t| dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \\ &= \frac{2I_m}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{2I_m}{\pi}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо $I_m = \frac{\pi I_0}{2}$. Підставляючи I_m та інтегруючи, знаходимо діюче значення струму:

$$\begin{aligned} I_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{2I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \sqrt{\frac{2I_m^2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \frac{I_0 \pi}{\sqrt{8}}. \end{aligned}$$

Задача 4. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 3,0$ МГц переходить з вакууму у немагнітне середовище з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4,0$. Знайти приріст її довжини хвилі.

Розв'язання

$\nu = 3\text{МГц}$ $\varepsilon = 4$ $\Delta\lambda - ?$	При переході електромагнітної хвилі з одного середовища в інше її частота не змінюється, а змінюється швидкість (10.7)
---	--

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

де c – швидкість хвилі у вакуумі. Довжина хвилі визначається виразом

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon}}$$

Приріст довжини хвилі знайдемо за формулою

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) = -50 \text{ м.}$$

Задача 5. Виходячи з рівнянь Максвелла, показати, що для плоскої електромагнітної хвилі (рис. 10.6), яка поширюється у вакуумі вздовж осі x ,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Розв'язання

Запишемо рівняння Максвелла для вакууму

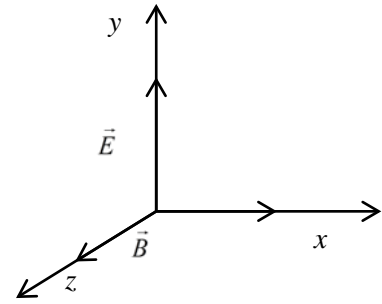
\vec{E}, \vec{B}	$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}$ $\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$
--------------------	--

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$\text{div}\vec{D} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

З рівняння (10.5) плоскої хвилі $\xi = a \cos(\omega t - kx)$, яка поширюється вздовж осі x , випливає, що параметри хвилі залежать тільки від часу і координати x (рис. 10.6):



$$\vec{E} = \vec{E}(t, x), \vec{B} = \vec{B}(t, x).$$

Рис. 10.6.

З умови поперечності електромагнітних хвиль випливає, що

$$\vec{E} = (0, E, 0), \vec{B} = (0, 0, B).$$

З урахуванням сказаного, запишемо перше і друге рівняння Максвелла:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}.$$

Замінивши H і D через B і E , отримаємо $-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$. Враховуючи, що $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, знаходимо

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}.$$

Задача 6. Знайти середнє значення вектора Умова–Пойнтінга $\langle \vec{S} \rangle$ для плоскої електромагнітної хвилі $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, якщо хвиля поширюється у вакуумі.

Розв'язання

$$\frac{\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})}{\langle \vec{S} \rangle - ?}$$

Вектор Умова–Пойнтінга дає густину потоку електромагнітної енергії і визначається виразом (10.9):

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}].$$

Напрявлений вектор \vec{S} вздовж нормалі \vec{n} до фронту хвилі. Враховуючи, що $\vec{E} \perp \vec{H}$ і $\sqrt{\epsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$, перетворимо вираз для густини потоку електромагнітної енергії \vec{S} до вигляду:

$$\vec{S} = \epsilon_0 E^2 c \vec{n},$$

де $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – швидкість хвилі у вакуумі. Підставимо для E задану

залежність і усереднимо за періодом $T = 2\pi/\omega$:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_m^2 c \vec{n}}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) dt = \frac{\epsilon_0 E_m^2 c \vec{n}}{2}.$$

При інтегруванні враховано, що $\int_0^T \cos^2 x dx = \frac{T}{2}$. Отриманий вираз можна перетворити до вигляду:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_m H_m}{2} \vec{n} = \frac{[\vec{E}_m \cdot \vec{H}_m]}{2}.$$

Задачі для контролю

1. Коливальний контур складається з конденсатора ємності C , котушки індуктивності L з дуже незначним опором і ключа. При розімкненому ключі конденсатор зарядили до напруги U_m і потім у момент $t = 0$ замкнули ключ. Знайти:

а) струм в контурі як функцію часу $I(t)$;

б) е.р.с. самоіндукції в котушці у моменти, коли електрична енергія конденсатора виявляється рівною енергії струму в котушці.

2. По прямому провіднику кругового перерізу тече струм I . Знайти потік вектора Пойнтінга через бічну поверхню ділянки цього провідника, яка має опір R .

3. Знайти світловий тиск сонячного випромінювання на квадратний метр земної поверхні, перпендикулярний до напрямку випромінювання. Густина потоку сонячної енергії (сонячна стала) $8,4 \text{ Дж/см}^2 \cdot \text{хв}$. Вважати, що хвиля повністю поглинається земною поверхнею.

Задачі для самостійного розв'язання

1. У коливальному контурі, що складається з плоского конденсатора і котушки індуктивності з дуже незначним опором, відбуваються коливання з енергією W . Пластини конденсатора повільно розсунули так, що частота коливань збільшилася у η разів. Яку роботу виконали при цьому?

Відповідь: $A = (\eta^2 - 1)W$.

2. Коливальний контур має ємність $C = 10 \text{ мкФ}$, індуктивність $L = 25 \text{ мГ}$ і активний опір $R = 1 \text{ Ом}$. Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться у e разів?

Відповідь: $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{CR^2}} - 1 = 16$.

3. Коливальний контур складається з конденсатора ємності $C = 4 \text{ мкФ}$ і котушки з індуктивністю $L = 2 \text{ мГ}$ і активним опором $R = 10 \text{ Ом}$. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимуму струму.

Відповідь: $W_L/W_C = L/CR^2 = 5$.

4. Знайти силу світлового тиску F_1 сонячного випромінювання на поверхні земної кулі, вважаючи, що випромінювання повністю поглинається поверхнею. Знайти відношення цієї сили до сили F_2 гравітаційного тяжіння Сонця. Середня густина Землі $\rho = 5,5 \text{ г/см}^3$.

Відповідь: $F_1 = 5,9 \cdot 10^6 \text{ Н}$; $F_1/F_2 = 1,6 \cdot 10^{-14}$.

XI. СТРУМ У ВАКУУМІ

§ 54. Електронна емісія

Метали містять електрони, які беруть участь у тепловому русі, проте електрони не виходять з металу, оскільки поблизу поверхні є сили, які утримують електрони всередині металу. Це сили, які діють на електрони з боку іонів решітки. Внаслідок цієї взаємодії у поверхневому шарі металу з'являється електричне поле, а потенціал при переході із зовнішнього простору в метал збільшується на деяку величину φ . Потенціальна енергія електрона зменшується на величину $e\varphi$ ($e < 0$).

Нехай W_0 – енергія електрона, який знаходиться у стані спокою поза металом, W_1 – енергія електрона всередині металу. Тоді, якщо $W_1 < W_0$, електрон не може покинути метал, оскільки його енергії недостатньо для виконання роботи проти сил притягіння з боку іонів. Умова виходу електрона $W_1 \geq W_0$.

За кімнатних температур ця умова не виконується. Електрони зв'язані у провіднику. Якщо їм надати будь-яким способом додаткову енергію, частина електронів отримає можливість покинути метал. Спостерігається явище випускання електронів, яке називається електронною емісією.

Залежно від способів надання енергії електронам розрізняють різні типи емісії. Якщо електрони отримують додаткову енергію за рахунок підвищення температури тіла, то говорять про термоелектронну емісію; при отриманні енергії за рахунок опромінення світловим потоком – фотоемісії або фотоелектричному ефекті; якщо електрони залишають метал при бомбардуванні зарядженими частинками, говорять про вторинну електронну емісію.

§ 55. Вольт-амперна характеристика вакуумного діода

Для спостереження і вивчення термоелектронної емісії може бути використана вакуумна лампа, що містить два електроди: один у вигляді дроту з тугоплавкого матеріалу (вольфрам, молібден), який розігрівається струмом – катод, інший, холодний електрод, який збирає термоелектрони – анод. Подібні лампи, які називаються вакуумними діодами, набули широкого розповсюдження в радіотехніці і для випрямлення змінного струму.

Складемо електричне коло, в яке включимо вакуумний діод (рис. 11.1). При холодному катоді струм у колі не виникає, оскільки між електродами вакуум і носії струму відсутні. Якщо розжарити катод до високої температури, то міліамперметр виявляє появу струму. Причому струм може виникнути тільки в тому випадку, якщо позитивний полюс батареї з'єднаний з анодом, а негативний – з катодом. Якщо поміняти полярність підключення батареї, струму у колі не буде. Цей факт показує, що катод випускає електрони.

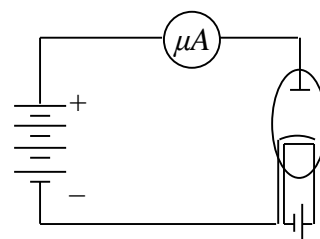


Рис. 11.1.

Коли напруга між анодом і катодом дорівнює нулю $U = 0$, при розігрітому катоді струм відмінний від нуля $I \neq 0$, це свідчення того, що електрони мають розподіл за швидкостями і навіть за відсутності електричного поля між анодом і катодом деякі електрони досягають анода.

Сила струму залежить від величини потенціалу анода відносно катода і від його температури. При даній температурі сила струму зростає до деякого значення, яке називається струмом насичення. При цьому усі електрони, що емітують з катода, досягають анода. Струм насичення зростає з ростом температури, оскільки збільшується число електронів, що вилітають з катода. Залежність струму діода від потенціалу анода має вигляд:

$$I = cU^{3/2}, \quad (\text{A})$$

де c – функція форми і розмірів електродів.

Для плоского діода:

$$c = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}},$$

де S – площа електродів;

d – відстань між ними.

Формула (А) виражає залежність на ділянках 0, 1, 2, 3, тобто до виходу

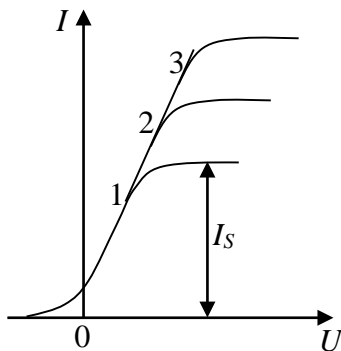


Рис. 11.2.

на насичення (рис. 11.2). Ця формула була отримана С. А. Богуславським і незалежно від нього І. Ленгмюром. Вона називається законом Богуславського–Ленгмюра або «законом 3/2».

Густина струму насичення, як зазначено вище, сильно залежить від температури і виражається формулою Річардсона–Дешмена:

$$j_s = AT^2 \exp(-\Phi/kT),$$

$A = \text{const}$ для усіх металів, Φ – величина, яка має розмірність енергії, за визначенням Φ називається термоелектронною роботою виходу. Вона дорівнює різниці між енергією електрона, який знаходиться у стані спокою у вакуумі, і максимальною кінетичною енергією електрона у металі:

$$\Phi = W_0 - E_{\text{max}}.$$

Іншими словами, Φ – це робота, яку необхідно виконати, щоб вирвати електрон з металу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. Москва: Наука, 1987. 480 с.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Москва: Наука, 1977. 687 с.
3. Калашников С. Г. Электричество. Москва: Наука, 1977. 591 с.
4. Зуйкова З. Г., Русаков В. Ф., Русакова Н. М., Семко А. Н. Методические указания к решению задач по электричеству, магнетизму, колебаниям и волнам. Донецк: ДонНУ, 2004. 121 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
I. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ	4
§ 1. Елементарний заряд. Два роди електрики	4
§ 2. Взаємодія зарядів. Закон Кулона	5
§ 3. Електричне поле. Напруженість поля	8
§ 4. Потенціал і робота сил електростатичного поля.....	11
§ 5. Зв'язок між напруженістю електричного поля і різницею потенціалів	16
§ 6. Теорема Гауса	18
§ 7. Рівновага зарядів на провіднику	20
§ 8. Провідник у зовнішньому електричному полі	21
Зведення основних формул та задачі до розділу I	22
II. ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ	50
§ 9. Поляризація діелектриків	50
§ 10. Поле всередині діелектрика	51
§ 11. Об'ємні та поверхневі зв'язані заряди	52
§ 12. Вектор електричного зміщення	54
§ 13. Поле всередині плоскої пластини.....	55
§ 14. Електроємність і енергія електричного поля	57
Зведення основних формул та задачі до розділу II.....	62
III. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ	89
§ 15. Електричний струм	89
§ 16. Електрорушійна сила.....	93
§ 17. Закон Ома. Опір провідників	95
§ 18 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	97
§ 19. Правила Кірхгофа.....	98
§ 20. Потужність струму.....	99
§21. Закон Джоуля–Ленца	101

Зведення основних формул та задачі до розділу III	103
IV. КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ПРОВІДНОСТІ МЕТАЛІВ	123
§ 22. Природа носіїв заряду в металах	123
§ 23. Класична теорія електропровідності металів.....	125
V. МАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ.....	129
§ 24. Взаємодія струмів	129
§ 25. Магнітне поле	131
§26. Закон Біо–Савара–Лапласа.....	132
§27. Сила Лоренца.....	134
§ 28. Закон Ампера.....	134
§ 29. Контур зі струмом в магнітному полі	136
§ 30. Робота при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі	139
§ 31. Теорема Гауса для магнітного поля. Закон повного струму	141
§ 32. Поле всередині провідника зі струмом.....	145
VI. ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ІНДУКЦІЯ	146
§ 33. Явище електромагнітної індукції	146
§34. Е.Р.С. індукції.....	146
§ 35. Явище самоіндукції.....	148
§ 36. Взаємна індукція	151
§ 37. Струм при замиканні і розмиканні кола	152
VII. МАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ	155
§ 38. Намагнічування магнетиків і напруженість магнітного поля.....	155
§ 39. Види магнетиків	156
§ 40. Гістерезис	157
§ 41. Енергія магнітного поля	159
Зведення основних формул та задачі до розділів V–VII.....	162
VIII. РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ І МАГНІТНИХ ПОЛЯХ.....	189
§ 42. Рух заряджених частинок в однорідному електричному полі	189

§43. Рух заряджених частинок в магнітному полі	191
ІХ. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ	194
§ 44. Вільні коливання у контурі	194
§ 45. Вільні затухаючі коливання	196
§ 46. Вимушені електричні коливання.....	200
§ 47. Змінний струм.....	204
§ 48. Потужність у колі змінного струму	207
Х. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА.....	208
§ 49. Вихрове електричне поле	209
§ 50. Струм зміщення	211
§ 51. Система рівнянь Максвелла	215
§ 52. Електромагнітні хвилі. Хвильове рівняння для електромагнітного поля	217
§ 53. Плоска електромагнітна хвиля	220
§ 54. Енергія електромагнітних хвиль	223
Зведення основних формул та задачі до розділів ІХ–Х	225
ХІ. СТРУМ У ВАКУУМІ	236
§ 54. Електронна емісія	236
§ 55. Вольт-амперна характеристика вакуумного діода	237
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	239
ЗМІСТ	240

ДЛЯ ПОДАТОК

Навчальне видання

Русаков Володимир Федорович

ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

*(для студентів фізико-технічного факультету
денної форми навчання)*

Навчальний посібник

Редактор А. О. Цяпало

Технічний редактор Т. О. Алимова

Підписано до друку 09.06.2020 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 14,18
Тираж **100** прим. Зам. № 12

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018 р.