УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.0X.NN-NN

Ю. Горбань, канд. фіз.-мат. наук,
А. Соловйова, студ.
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця
E-mail: yuliyagorban77@gmail.com,

УЗАГАЛЬНЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО АНІЗОТРОПНОГО ВАГОВОГО РІВНЯННЯ

У статті досліджено розв'язність задачі Діріхле для модельного нелінійного вироджуваного анізотропного еліптичного рівняння другого порядку. Анізотропія і виродження (за незалежними змінними) характеризуються наявністю в лівій частині рівняння різних показників q_1 і q_2 і степеневих вагових функцій $|x|^{q_1}$ і $|x|^{q_2}$. Основним результатом роботи є теорема про існування узагальненого розв'язку розглянутої задачі Діріхле.
Ключові слова: вироджувані анізотропні еліптичні рівняння, задача Діріхле, існування розв'язків.

ВСТУП

За належної інтерпретації поняття похідної, багато важливих класів крайових задач і задач з крайовими та початковими умовами для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними можна розглядати як операторні рівняння або операторні диференціальні рівняння в рефлексивних банахових просторах. Цей факт дозволяє вивчати такі задачі за допомогою теорії монотонних операторів, яка є одним із сучасних напрямів нелінійного функціонального аналізу.

Загальна постановка задачі про розв'язність операторного рівняння вимагає наявності оператора A, діючого із деякого банахового простору W у відповідний спряжений простір W^*, і елемента $F \in W^*$ («правої частини» рівняння). При цьому сама задача полягає у відшуканні такого елемента $u \in W$, що для всіх $v \in W$ виконується рівність

$$\langle Au, v \rangle = \langle F, v \rangle . \tag{1}$$

Відповідні теореми про розв'язність операторних рівнянь вигляду (1) можна знайти, наприклад, у монографії [1, с. 78-98], у яких основними умовами є наявність властивостей монотонності і коерцитивності оператора A.

У даній статті встановлено існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння, яке відповідає нелінійному оператору дивергентного вигляду з деякими умовами зростання, еліптичності та монотонності стосовно коефіцієнтів, причому сам оператор визначений на відповідному соболєвському просторі. Доведення основного результату базується на використанні основної теореми теорії монотонних операторів, а саме: теореми Браудера – Мінті [1, с. 95], згідно з якою достатньо показати, що оператор, який породжує ліву частину рівняння, є радіально неперервним, коерцитивним і монотонним. Зауважимо, що при доведенні властивості коерцитивності згаданого вище оператора використано теорему вкладення відповідного вагового анізотропного простору Соболєва у клас Лебега L^2.

Відмітимо, що рівняння, розглянуте у статті, є модельним випадком анізотропних вагових рівнянь, які вивчаються в роботах [4; 5]. А саме, розглянуто задачу Діріхле для анізотропних вагових рівнянь з L^1 – правими частинами, розв'язки яких (так звані ентропійні розв'язки) належать більш широким функціональним класам, ніж простори Соболєва. У відповідних теоремах на ліву частину таких рівнянь накладаються певні умови зростання, коерцитивності та монотонності. Якщо права частина рівняння виявляється «достатньо гладкою», то ентропійний розв'язок співпадає з узагальненим. У модельному випадку, розглянутому у даній статті, ці умови виконуються автоматично.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У цьому розділі сформулюємо задачу Діріхле і дамо означення її узагальненого розв'язку, існування якого будемо досліджувати у подальшому. Також у цьому розділі визначимо підходящий ваговий анізотропний простір Соболєва, якому належить узагальнений розв'язок задачі Діріхле, і розглянемо деякі властивості цього простору.

Нехай $\Omega \subset R^2$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $q_i \in (1,2),\ i = 1,2$ – задані дійсні числа (показники анізотропії). За аналогії з [3, с. 106] розглянемо ваговий анізотропний простір Соболєва

$$W^{1,q_1,q_2}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : |x|^{q_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} \in L^1(\Omega), i = 1,2 \right\}.$$

Нескладно показати, що він є банаховим простором відносно норми

$$\|u\|_{W^{1,q_1,q_2}(\Omega)} = \int_\Omega |u|\, dx + \left(\int_\Omega |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} + \left(\int_\Omega |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/q_2} . \tag{2}$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ позначимо замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторі $W^{1,q_1,q_2}(\Omega)$. Простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми, що індукована нормою (2). Крім того, простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ є рефлексивним (див. [2, с. 14]).

З твердження 2.9 [3, с. 109] випливає вкладення $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ та існування такої додатної залежної лише від n, q_1 і q_2 сталої c_0, що для довільної функції $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ маємо:

$$\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}\le c_0\left(\int_\Omega |x|^{q_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^{q_1}dx\right)^{1/2q_1}\left(\int_\Omega |x|^{q_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^{q_2}dx\right)^{1/2q_2},$$

звідки, користуючись нерівністю Юнга, виводимо нерівність

$$\left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}\le c_0\left\{\left(\int_\Omega |x|^{q_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^{q_1}dx\right)^{1/2q_1}+\left(\int_\Omega |x|^{q_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^{q_2}dx\right)^{1/2q_2}\right\}. \tag{3}$$

Нехай $a_i(x,\xi)=|x|^{q_i}|\xi_i|^{q_i-1}sign\ \xi_i$, де $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_1;\xi_2)\in R^2$, $i=1,2.$ Зауважимо, що для майже всіх $x\in\Omega$ і будь-яких $\xi,\eta\in R^2$ виконується нерівність:

$$\left[a_1(x,\xi)-a_1(x,\eta)\right]\ (\xi_1-\eta_1)+\left[a_2(x,\xi)-a_2(x,\eta)\right]\ (\xi_2-\eta_2)\ge 0. \tag{4}$$

Розглянемо задачу Діріхле:

$$-\frac{\partial(a_1(x,\nabla u))}{\partial x_1}-\frac{\partial(a_2(x,\nabla u))}{\partial x_2}=f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{6}$$

Перш за все зауважимо, що для всіх $u,v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ функції $a_1(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_1}$ і $a_2(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_2}$ є сумовними на Ω. Дійсно, використовуючи нерівність Юнга, отримуємо:

$$\left|a_1(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|\le |x|^{q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|^{q_1}+|x|^{-q_1/(q_1-1)}|a_1(x,\nabla u)|^{q_1/(q_1-1)}=|x|^{q_1}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|^{q_1}+|x|^{q_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^{q_1}.$$

Звідси, беручи до уваги, що $u,v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$, отримуємо включення $a_1(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_1}\in L^1(\Omega)$. Аналогічно, $a_2(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_2}\in L^1(\Omega)$.

Нехай $A:\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)\to\left(\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)\right)^*$ оператор такий, що для довільних $u,v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$

$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega\left(a_1(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+a_2(x,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx. \tag{7}$$

Означення. Нехай $f\in L^2(\Omega)$. Функція $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком задачі Діріхле (5), (6), якщо для довільної функції $v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ має місце інтегральна тотожність $\langle Au,v\rangle=\int_\Omega fv dx$.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

У цьому розділі сформулюємо і доведемо теорему існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння.

Теорема. Нехай $a_i(x,\xi)=|x|^{q_i}|\xi_i|^{q_i-1}sign\ \xi_i$, $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_1;\xi_2)\in R^2$, $i=1,2.$ Тоді існує узагальнений розв'язок задачі Діріхле (5), (6).

Доведення. Скористаємось теоремою Браудера – Мінті, згідно з якою достатньо показати, що оператор A, який визначається рівністю (7), є радіально неперервним, коерцитивним і монотонним.

Для доведення радіальної неперервності оператора A, згідно з відповідним означенням (див. [1, с. 79]), потрібно показати, що для довільних фіксованих $u,v\in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ дійсна функція $s\to\langle A(u+sv),v\rangle$ є неперервною на $[0,1]$. Для цього скористаємося означенням неперервності цієї функції. Нехай $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ – така послідовність дійсних чисел, що для будь-яких $m \in N$ маємо $s_m \in [0,1]$, $s_m \to s$ при $m \to \infty$. Тоді, очевидно, $s \in [0,1]$. Треба довести, що при $m \to \infty$

$$\langle A(u + s_m v), v \rangle \to \langle A(u + sv), v \rangle ,$$

або, відповідно до (7),

$$\int_\Omega \left(a_1(x, \nabla u + s_m \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u + s_m \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx \to \int_\Omega \left(a_1(x, \nabla u + s \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u + s \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx . \tag{8}$$

Позначимо для будь-якого $x \in \Omega$

$$\varphi(x) = a_1(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} ,$$

$$\varphi_m(x) = a_1(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} .$$

Оскільки функція a_i, $i = 1,2$, згідно з означенням, неперервна в точці $\nabla u(x) + s \nabla v(x)$, то при майже всіх $x \in \Omega$ маємо

$$a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \to a_i(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)), \quad m \to \infty ,$$

звідки випливає, що для майже всіх $x \in \Omega$

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x), \quad m \to \infty . \tag{9}$$

Отримаємо тепер рівномірну щодо m оцінку для $\varphi_m(x)$. За допомогою нерівності Юнга і означення функції a_i, $i = 1,2$, виводимо:

$$\left| a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| \le |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + |x|^{-q_i/(q_i-1)} \left| a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i/(q_i-1)} =$$

$$= |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + |x|^{-q_i/(q_i-1)} \left(|x|^{q_i} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + s_m \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i-1} \right)^{q_i/(q_i-1)} \le |x|^{q_i} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + \left(1 + s_m^{\ q_i}\right) |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i},$$

звідки, користуючись обмеженістю послідовності $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ (в силу її збіжності), отримаємо при всіх $m \in N$:

$$|\varphi_m(x)| \le |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|^{q_1} + \left(1 + M_1^{q_1}\right) |x|^{q_1} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|^{q_2} + \left(1 + M_2^{q_2}\right) |x|^{q_2} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} \right|^{q_2} ,$$

де M_1, M_2 – такі додатні сталі, що $s_m^{q_1} \le M_1$, $s_m^{q_2} \le M_2$, $m \in N$.

З останньої оцінки, включення $u, v \in \overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$, властивості (9) і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла виводимо (8). Отже, радіальну неперервність оператора A доведено.

Для встановлення коерцитивності оператора A скористаємося відповідним означенням (див. [1, с. 80]). За допомогою нерівності Гельдера і оцінки (3) виводимо:

$$\int_\Omega |u|\, dx \le \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(meas\ \Omega \right)^{1/2} \le c_0 \left(meas\ \Omega \right)^{1/2} \left\{ \left(\int_\Omega |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} + \left(\int_\Omega |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/q_2} \right\}.$$

Звідси випливає, що для довільної функції $u \in \overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ маємо:

$$\|u\|^{q_-}_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)} \le \left(1 + c_0 \left(meas\ \Omega \right)^{1/2} \right)^{q_-} \int_\Omega \left(|x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} \right) dx , \tag{10}$$

де $q_- = \min \{q_1, q_2\}$.

Далі покладемо в (7) $v = u \in \overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ і скористаємося (10):

$$\langle Au, u \rangle = \int_\Omega \left(a_1(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx = \int_\Omega \left(|x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} \right) dx \ge c_* \|u\|^{q_-}_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)} ,$$

де $c_* = \left(1 + c_0 \left(meas\ \Omega \right)^{1/2} \right)^{-q_-}$.

Отже,

$$\langle Au,u\rangle \geq c_* \|u\|^{q_-}_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)},$$

звідки

$$\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)}} \geq c_* \|u\|^{q_- -1}_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)} \to \infty \quad \text{при} \quad \|u\|_{\overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)} \to \infty,$$

що і означає коерцитивність оператора A.

Залишилося встановити монотонність оператора A (див. [1, с. 79]). Згідно (7) і (4) для довільних $u,v \in \overset{o}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ маємо:

$$\langle Au - Av, u-v\rangle = \int_\Omega \left\{ \left(a_1(x,\nabla u) - a_1(x,\nabla v)\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) + \left(a_2(x,\nabla u) - a_2(x,\nabla v)\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) \right\} dx \geq 0,$$

що і означає монотонність оператора A.

Таким чином, за теоремою Браудера – Мінті існує узагальнений розв'язок задачі Діріхле (5), (6) для довільної правої частини рівняння $f \in L^2(\Omega)$. Теорему доведено.

Отже, у модельному випадку, розглянутому у даній статті, для конкретно заданих $a_i, i = 1,2$ (у вигляді степеневих функцій з анізотропією та виродженням) в лівій частині рівняння, перевіряється безпосереднє виконання потрібних в теоремі Браудера-Мінті умов на нелінійний оператор, який породжує ця ліва частина.

ВИСНОВКИ

У статті досліджено питання про розв'язність задачі Діріхле для модельного вироджуваного анізотропного рівняння другого порядку. Доведено теорему про існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння другого порядку, яке відповідає нелінійному оператору дивергентного вигляду з «природними» умовами зростання, еліптичності і монотонності для коефіцієнтів, причому сам оператор визначений на відповідному ваговому анізотропному просторі Соболєва. При доведенні теореми використано відомі результати про розв'язність операторних рівнянь з монотонними операторами в рефлексивних банахових просторах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1978. – 336 с.
2. Ковалевский А.А., Горбань Ю.С. Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1 -данными // Донецк, ИПММ НАН Украины, препринт. – 2007. – 92 с.
3. Ковалевский А.А., Горбань Ю.С. О Т-решениях вырождающихся анизотропных элиптических вариационых неравенств с L^1 -данными // Известия РАН, сер. матем. – 75. – №1. – 2011. – с. 101-160.
4. Gorban Yu. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations // Open Math. – 15. – 2017. – p. 768-786.
5. Gorban Yu. On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations // Mat. Stud. – 47. – №1. – 2017. – p. 59-70.

Стаття надійшла до редакції 14.09.2020

Ю. Горбань, канд. физ.-мат. наук,
А. Соловьева, студ.
Донецкий национальный университет имени Восилия Стуса, Винница, Украина

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО АНИЗОТРОПНОГО ВЕСОВОГО УРАВНЕНИЯ

В работе исследована разрешимость задачи Дирихле для модельного нелинейного вырождающегося анизотропного эллиптического уравнения второго порядка. Анизотропия и вырождение (по пространственным переменным) характеризуются наличием в левой части уравнения различных показателей q_1 и q_2 и степенных весовых функций $|x|^{q_1}$ и $|x|^{q_2}$. Основным результатом работы является теорема о существовании обобщенного решения рассматриваемой задачи Дирихле.

Ключевые слова: вырождающиеся анизотропные эллиптические уравнения, задача Дирихле, существование решений.

Першого автора підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (№ 0118U003138).

(***Примітка редактора****: думаю, що це зауваження варто помістити після висновків, перед літературою. Так робиться у стандартних статтях у наукових журналах.*)

Yu. Gorban, Ph. D., Soloviova, stud.
Vasyl` Stus Donetsk National University, Vinnitsia

A GENERALIZED SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A MODEL ANISOTROPIC WEIGHTED EQUATION

The paper deals with the Dirichlet problem for a model nonlinear degenerate anisotropic elliptic second-order equation. Anisotropy and degeneration (with respect to the independent variables) is characterized by the presence of different exponents q_1, q_2 and weighted functions $|x|^{q_1}$, $|x|^{q_2}$ in the left side of the equation. The main result of the paper is theorem on the existence of the generalized solution of the Dirichlet problem under consideration.
Keywords: degenerate anisotropic elliptic equations, Dirichlet problem, existence of the solutions.